Introdução à Economia Matemática

Publicações Matemáticas

Introdução à Economia Matemática

Aloísio Araújo
IMPA

impa

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger / Sérgio R. Vaz

Publicações Matemáticas

- Introdução à Topologia Diferencial – Elon Lages Lima
- Criptografia, Números Primos e Algoritmos – Manoel Lemos
- Introdução à Economia Dinâmica e Mercados Incompletos – Aloísio Araújo
- Conjuntos de Cantor, Dinâmica e Aritmética – Carlos Gustavo Moreira
- Geometria Hiperbólica – João Lucas Marques Barbosa
- Introdução à Economia Matemática – Aloísio Araújo
- Superfícies Mínimas – Manfredo Perdigão do Carmo
- The Index Formula for Dirac Operators: an Introduction – Levi Lopes de Lima
- Introduction to Symplectic and Hamiltonian Geometry – Ana Cannas da Silva
- Primos de Mersenne (e outros primos muito grandes) – Carlos Gustavo T. A. Moreira e Nicolau Saldanha
- The Contact Process on Graphs – Márcia Salzano
- Canonical Metrics on Compact almost Complex Manifolds – Santiago R. Simanca
- Introduction to Toric Varieties – Jean-Paul Brasselet
- Birational Geometry of Foliations – Marco Brunella
- Introdução à Teoria das Probabilidades – Pedro J. Fernandez
- Teoria dos Corpos – Otto Endler
- Introdução à Dinâmica de Aplicações do Tipo Twist – Clodoaldo G. Ragazzo, Mário J. Dias Carneiro e Salvador Addas Zanata
- Elementos de Estatística Computacional usando Plataformas de Software Livre/Gratuito – Alejandro C. Frery e Francisco Cribari-Neto
- Uma Introdução a Soluções de Viscosidade para Equações de Hamilton-Jacobi – Helena J. Nussenzveig Lopes, Milton C. Lopes Filho
- Elements of Analytic Hypoellipticity – Nicholas Hanges
- Métodos Clássicos em Teoria do Potencial – Augusto Ponce
- Variedades Diferenciáveis – Elon Lages Lima
- O Método do Referencial Móvel – Manfredo do Carmo
- A Student's Guide to Symplectic Spaces, Grassmannians and Maslov Index – Paolo Piccione e Daniel Victor Tausk
- Métodos Topológicos en el Análisis no Lineal – Pablo Amster
- Tópicos em Combinatória Contemporânea – Carlos Gustavo Moreira e Yoshiharu Kohayakawa
- Uma Iniciação aos Sistemas Dinâmicos Estocásticos – Paulo Ruffino
- Compressive Sensing – Adriana Schulz, Eduardo A.B.. da Silva e Luiz Velho
- O Teorema de Poncelet – Marcos Sebastiani
- Cálculo Tensorial – Elon Lages Lima
- Aspectos Ergódicos da Teoria dos Números – Alexander Arbieto, Carlos Matheus e C. G. Moreira
- A Survey on Hiperbolicity of Projective Hypersurfaces – Simone Diverio e Erwan Rousseau

IMPA - ddic@impa.br - http://www.impa.br - ISBN: 978-85-244-0003-2

SUMÁRIO

3. A eficiência de Pareto e suas relações com o equilíbrio walrasiano

4. O núcleo da economia e sua relação com o equilíbrio walrasiano

5. Teoria de Jogos

(A) Jogos de soma zero e o teorema de existência de solução minimax

(B) O conceito de equilíbrio de Nash – sua existência e aplicações

(C) Jogos com pagamentos laterais – o valor de Shapley

INTRODUÇÃO

O objetivo deste livro é o de apresentar ao leitor algumas das principais idéias da teoria econômica, vistas de um ângulo formal. Na primeira parte, estudamos o comportamento isolado das unidades econômicas. No primeiro capítulo, abordamos o comportamento do consumidor. Tratamos a questão da representação de preferências por utilidades, bem como as propriedades básicas das preferências e a continuidade da função de demanda. Estudamos ainda nesse capítulo o comportamento da firma.

O segundo capítulo é dedicado ao problema do comportamento racional diante da incerteza. O capítulo começa com a teoria da utilidade esperada de von-Neumann e Morgenstern. Em seguida, estudamos a medida de aversão ao risco de Arrow e Pratt bem como sua justificação em termos do prêmio de risco e da probabilidade de risco. Concluímos o segundo capítulo com a apresentação de um teorema que estabelece a equivalência de diversos critérios de ordenação dos riscos.

Na segunda parte do livro apresentamos o estudo do comportamento coletivo. Começamos pelo teorema de impossibilidade de Arrow. Mais precisamente, demonstramos que não é possível obter uma preferência social por um método que respeite a unanimidade e a independência das alternativas irrelevantes, a menos que este método seja ditatorial. No segundo capítulo desta segunda parte estudamos o equilíbrio geral Walrasiano. Apresentamos uma demonstração de existência. No capítulo subsequente, apresentamos o critério de eficiência de Pareto e a demonstração do fato que todo equilíbrio Walrasiano é ótimo de Pareto e vice-versa: todo ótimo de Pareto pode ser visto como um equilíbrio Walrasiano, para alocações iniciais apropriadas. No capítulo três o conceito do núcleo de uma economia é definido como o conjunto dos pontos que não são bloqueáveis por nenhum subconjunto dos participantes da economia, isto é, nenhum grupo de indivíduos desta economia pode melhorar sua situação a partir de um ponto do núcleo. Neste capítulo demonstramos que todo equilíbrio Walrasiano está no núcleo, e, embora a recíproca não seja verdadeira, demonstramos que vale a conjectura de Edgeworth: dada uma alocação que não seja equilíbrio Walrasiano então ela também não estará no núcleo de uma economia com um número suficientemente grande de participantes, isto é, à medida em que aumente o número de participantes a economia torna-se mais competitiva e portanto o núcleo converge para o conjunto das alocações que são equilíbrio Walrasiano. Finalmente, no último capítulo apresentamos algumas das idéias principais da teoria dos jogos. O teorema minimax é demonstrado no caso em que existem dois jogadores e um número finito de estratégias puras para cada jogador. Em seguida, demonstramos a existência de um equilíbrio de Nash bem como comentamos sobre o valor de Shapley e jogos com pagamentos laterais.

Para finalizar gostaríamos de ressaltar que procuramos escrever este livro de modo a torná-lo acessíveis a um público o mais amplo possível. Para tanto, fizemos várias concessões. Contudo, é recomendável que o leitor tenha feito cursos de Cálculo, Álgebra Linear, Introdução à Análise, Análise no $\mathbb{R}^n$ e Introdução à Teoria das Probabilidades. Obviamente, conhecimentos prévios de Economia ajudam a compreensão do texto, mas não são imprescindíveis.

O autor agradece a revisão do texto realizada para a edição de 2004–2005 por José Heleno Faro e Luciano I. de Castro. Ainda, o autor também é grato pelo excelente trabalho gráfico e de digitação feito por Rogério Dias Trindade.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$ = conjunto dos números reais, $\mathbb{R}^\ell = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{\ell \text{ vezes}}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$,

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $\mathbb{Q} = \{p/q,\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$.

$\mathbb{R}^\ell_+ = \{x = (x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell;\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, \ell\}$.

$\mathbb{R}^\ell_{++} = \{x = (x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell;\ x_i > 0 \quad i = 1, \dots, \ell\}$.

Se $x \in \mathbb{R}^\ell$, $||x|| = \left(\sum\limits_{i=1}^{\ell} x_i^2\right)^{1/2}$ é norma euclidiana e $||x||_1 = \sum\limits_{i=1}^{\ell} |x_i|$ é a norma ℓ_1.

Dados $x, y \in \mathbb{R}^\ell$, $x \geq y$ se $x_i \geq y_i$, $i = 1, \dots, \ell$;

$x > y$ se $x \geq y$ e $x \neq y$.

$x \gg y$ se $x_i > y_i$ $i = 1, \dots, \ell$.

$S^{\ell-1}_+ = \{x = (x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell_+ : \sum\limits_{i=1}^{\ell} x_i = 1\}$.

$S^{\ell-1}_{++} = \{x = (x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell_{++} : \sum\limits_{i=1}^{\ell} x_i = 1\}$.

$S^{\ell-1}_{+\varepsilon} = \{x = (x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell_+ : \sum\limits_{i=1}^{\ell} x_i = 1, \quad x_i \geq \varepsilon\}$.

$\#\, A$ é o número de elementos de um conjunto A com um número finito de elementos.

$A^c = \{x : \quad x \notin A\}$ i.e. o complemento de A.

δ_A é a função indicadora do conjunto A i.e.: $\delta_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$.

$A \setminus B = \{x \in A : \quad x \notin B\}$.

Dado $A \subset \mathbb{R}^\ell$, ∂A é a fronteira do conjunto A, i.e., $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^\ell, \quad \exists \{x_n\} \subset A \text{ com } x_n \to x \text{ e } \exists \{y_n\} \subset A^c \text{ com } y_n \to x\}$.

$\overset{\circ}{A}$ é o interior do conjunto $A \subset \mathbb{R}^\ell$, $\overset{\circ}{A} = A \setminus \partial A$.

$\overline{A}$ é o fecho do conjunto $A \subset \mathbb{R}^\ell$, $\overline{A} = A \cup \partial A$. A é fechado se $A = \overline{A}$.

$B_\varepsilon(x)$ é a bola fechada de raio $\varepsilon > 0$ e centro $x \in \mathbb{R}^\ell$, para a norma euclidiana,

$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^\ell, \; ||y - x|| \leq \varepsilon\}$.

Para $x, y \in \mathbb{R}^\ell$, o produto interno de $\mathbb{R}^\ell$ é dado por $xy = \sum_{i=1}^{\ell} x_i y_i$.

PARTE I

O COMPORTAMENTO ISOLADO DAS UNIDADES ECONÔMICAS

I – O COMPORTAMENTO ISOLADO DAS UNIDADES ECONÔMICAS

O objetivo desta primeira parte deste livro é o de estudar as unidades econômicas *per se*, i.e., sem a preocupação de vermos como elas interagem. No primeiro capítulo estudamos as preferências dos consumidores e a sua representação por funções de utilidade. As preferências são essencialmente o critério pelo qual um consumidor decide qual entre dois conjuntos de bens é mais desejável. Neste capítulo também estudamos a correspondência de demanda do consumidor, φ, que é a correspondência que associa a cada preço $p \in S_+^{\ell-1}$ a cesta de bens $\varphi(p)$ que lhe proporcione satisfação máxima, e que possa por ele ser adquirida i.e., esteja em $\{x \in \mathbb{R}_+^\ell, \quad px \leq pw\}$ onde w é a cesta de recursos iniciais. Terminamos o capítulo termina com o estudo do comportamento de uma firma que seja caracterizada por um subconjunto estritamente convexo e limitado no $\mathbb{R}^\ell$ e seja passiva em relação aos preços. Isto é, uma firma que escolha a quantidade a ser produzida tomando os preços de insumos e produtos como dados.

No segundo capítulo estudamos o comportamento do consumidor em uma situação de incerteza. Iniciamos com a teoria da utilidade esperada de von-Neumann e Morgenstern. Esta teoria nos diz que, sob hipóteses de continuidade e independência, toda preferência no espaço de loterias (i.e. probabilidades em um espaço base) pode ser representada por uma utilidade linear nas probabilidades que, por sua vez, é dada pela utilidade esperada. Em seguida, apresentamos a medida de aversão ao risco de Arrow e Pratt, bem como sua justificação através do teorema que nos diz que se um consumidor tem maior aversão ao risco que outro então ele exige maior prêmio por assumir um determinado risco. Terminamos o capítulo com o estudo do ordenamento nos riscos i.e. das variáveis aleatórias. Neste capítulo provamos a equivalência de diversos critérios de "mais arriscado". Um destes critérios nos diz que uma variável aleatória é mais arriscada que outra se proporciona menor utilidade a todo indivíduo com uma função de utilidade côncava. Um outro critério diz que uma variável aleatória é mais arriscada que outra se tem maiores chances de assumir valores distantes da média.

1. O CONSUMIDOR E A FIRMA

Seja X o conjunto de bens econômicos a ser considerado em uma dada situação. Assim, por exemplo, X pode ser: $\mathbb{R}^\ell_+$, com cada coordenada indicando um bem; um espaço de seqüências, indicando bens datados e um número contável de períodos; o conjunto $\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell_+, : \quad \sum\limits_{i=1}^{\ell} x_i = 1\right\}$, indicando as probabilidades de se obter, respectivamente, as quantias R\$ $a_1, \ldots, R\$a_\ell$.

(a) O consumidor: preferências, utilidades e a representação de preferências por utilidades.

Definição 1. Uma função de utilidade é uma função u que associa a cada elemento $x \in X$ um nível de satisfação $u(x)$:

$$u\colon X \to \mathbb{R}.$$

Definição 2. Uma preferência $\succcurlyeq$ em X é uma pre-ordem completa em X. Isto é, $\succcurlyeq$ é uma relação em X (subconjunto de $X \times X$) tal que:

(i) $\succcurlyeq$ é completa: para todo $x, y \in X$ ou $x \succcurlyeq y$ ou $y \succcurlyeq x$.

(ii) $\succcurlyeq$ é transitiva: para todo $x, y, z \in X$ se $x \succcurlyeq y$ e $y \succcurlyeq z$ então $x \succcurlyeq z$.

Observação: (1) $x \succcurlyeq y$ significa $(x, y) \in \succcurlyeq$.

(2) Escrevemos $x \sim y$ caso $x \succcurlyeq y$ e $y \succcurlyeq x$.

(3) Por (i) temos que $\succcurlyeq$ é reflexiva i.e. $x \succcurlyeq x$, $\forall\, x \in X$.

Exemplo. Seja $X = \mathbb{R}^2_+$, $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

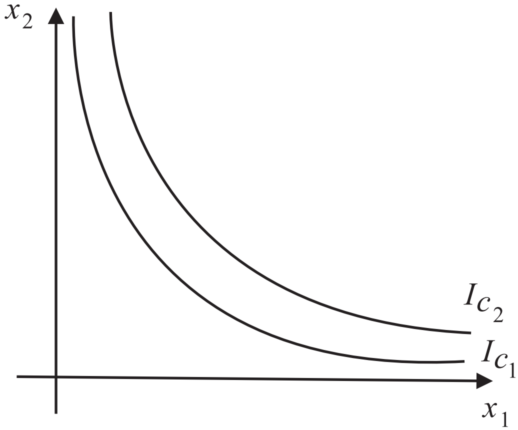


Figura 1

Na ilustração gráfica acima indicamos algumas curvas de indiferença do consumidor. Isto é, para $c \in \mathbb{R}$ traçamos as curvas de nível $I_c = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : \quad u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} = c\}$.

As definições acima nos dão duas formas distintas de descrever um consumidor. As funções de utilidades são mais convenientes do ponto de vista da manipulação analítica. Para calcular um máximo de uma função de utilidade em um dado conjunto, por exemplo, podemos nos valer dos multiplicadores de Lagrange. Por outro lado, ao exigirmos que um consumidor possua uma função de utilidade, estaremos pressupondo que ele saiba associar um "nível de satisfação" a cada cesta de bens (pontos de X). Enquanto esta é sem dúvida uma hipótese forte, a existência de uma preferência (completa) pressupõe, apenas, que dadas cestas x e y o consumidor tem discernimento para dizer, de forma consistente, ou qual das duas prefere ou que é indiferente entre ambas. Porém, como veremos a seguir, a existência de uma preferência ou de uma função de utilidade estão bastante relacionadas entre si.

Inicialmente, necessitamos de uma definição que nos indique quando uma utilidade e uma preferência expressam o mesmo gosto do consumidor.

Definição. Dizemos que uma preferência $\succcurlyeq$ e uma utilidade u estão associadas ou que $\succcurlyeq$ representa u (neste caso denotada $\succcurlyeq_u$) ou que u representa $\succcurlyeq$ (neste caso denotada $u_{\succcurlyeq}$) no caso em que para todo x e y em X

$$x \succcurlyeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y).$$

Dada uma utilidade, u, podemos definir, trivialmente, uma preferência $\succcurlyeq_u$ representando u:

$$x \succcurlyeq_u y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y).$$

A pergunta recíproca é a que apresenta um maior interesse. Dada preferência $\succcurlyeq$ podemos encontrar uma utilidade $u_{\succcurlyeq}$ representando $\succcurlyeq$? O exemplo a seguir nos diz que esta pergunta nem sempre tem uma resposta afirmativa.

Exemplo. Seja $\succcurlyeq$ a preferência alfabética ou lexicográfica em $X = \mathbb{R}^2_+$. Isto é, $(x_1, y_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 > y_1$ ou $x_1 = y_1$ e $x_2 \geq y_2$. Suponhamos que exista $u \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ representando $\succcurlyeq$. Vamos mostrar, então, que existe $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$, injetiva, o que é um absurdo; ver Lima (1976) Corolário 1, pg. 39 e Corolário 1, pg. 69. Com efeito, como $(r, 1) > (r, 0)$ temos que $u((r, 1)) > u((r, 0))$. Logo, existe $\varphi(r)$ racional tal que $u((r, 1)) \succ \varphi(r) \succ u((r, 0))$. Seja

$r' > r$. Como $(r', 1) > (r', 0)$ temos que existe $\varphi(r')$ racional tal que $u((r', 1)) > \varphi(r') > u((r', 0))$. Portanto,

$$\varphi(r') > u(r', 0) > u(r, 1) > \varphi(r).$$

Isto é, φ é crescente:

$$r' > r \Rightarrow \varphi(r') > \varphi(r)$$

e, portanto, injetiva. O que é um absurdo.

Vamos nos restringir agora a espaços de bens, X, que sejam topológicos. Os leitores não familiarizados com os conceitos de topologia geral podem pensar X como sendo um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^\ell$.

Definição. Uma preferência $\succcurlyeq$ é dita contínua caso $\succcurlyeq$, quando considerado como subconjunto de $X \times X$, for fechado.

A seguir apresentamos um teorema com condições suficientes para que a resposta à pergunta "recíproca" acima seja positiva.

Teorema. *Sejam X um espaço topológico contável de segunda ordem e $\succcurlyeq \subseteq X \times X$ uma preferência contínua. Então existe uma função de utilidade $u \colon X \to \mathbb{R}$ que representa $\succcurlyeq$.*

Observação: Recordamos ao leitor que X é dito contável de segunda ordem se existir uma família enumerável de abertos em X, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tal que, para todo aberto $A \subset X$ podemos encontrar $I \subset \mathbb{N}$ com $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Lembramos, também, ao leitor que todo subconjunto fechado de $\mathbb{R}^\ell$ é contável de segunda ordem quando considerado com a topologia induzida pela topologia euclidiana.

Demonstração: Dado $x \in X$ seja $I_x = \{n \in \mathbb{N}, \quad x \succ y$ para todo $y \in A_n\}$ e $u(x) = \sum\limits_{n \in I_x} \frac{1}{2^n}$ se $I_x \neq \emptyset$ e $u(x) = 0$ se $I_x = \emptyset$. Então,

$$x \succcurlyeq y = I_x \supset I_y = u(x) \geq u(y).$$

E,

$$x \succ y \Rightarrow y \in \{z \mid x \succ z\}$$

e

$$y \notin \{z \mid y \succ z\}.$$

Logo,

$$\{z \mid y \succ z\} \subsetneq \{z \mid x \succ z\}.$$

Mas, $\succcurlyeq$ contínua implica que os dois conjuntos são abertos (veja exercício 1). Portanto, $I_y \subsetneq I_x$ o que acarreta $u(y) < u(x)$. E conclui a demonstração do teorema.

A partir de um lema devido a Bowen (1968) podemos provar um teorema de Debreu (1964) afirmando que podemos encontrar uma função contínua representando $\succcurlyeq$.

Teorema. *Se X é um espaço topológico de segunda ordem e $\succcurlyeq \subset X \times X$ é uma preferência contínua, então existe uma função de utilidade $u\colon X \to \mathbb{R}$ contínua representando $\succcurlyeq$.*

(b) Propriedades das preferências e a função de demanda.

A seguir, vamos estudar algumas propriedades importantes das utilidades e preferências a serem utilizadas posteriormente. Até o final do capítulo vamos supor que $X \subset \mathbb{R}^\ell$ e que, portanto, $\succcurlyeq \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell$.

Definição. (i) $\succcurlyeq$ é dita estritamente monótona se dado $x > y$ então $x \succ y$.

(ii) $\succcurlyeq$ é dita monótona se dado $x \gg y$ então $x \succ y$.

(iii) $\succcurlyeq$ é dita localmente não saciada se dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ existir $y \in X$ com $||x - y|| < \varepsilon$ e $y \succ x$.

Observação: É óbvio que se $\succcurlyeq$ satisfaz a (i) então (ii) também é satisfeita, e se $\succcurlyeq$ satisfaz a (ii) então (iii) também é satisfeita.

Exemplo. $u(x_1, x_2) = x_1$ satisfaz a (ii) mas não a (i), $u(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ satisfaz a (iii) mas não a (ii).

As propriedades (i) e (ii) acima nos dizem que um consumidor tem maior satisfação quando lhe é oferecido maior quantidade de bens. Em particular, (i) nos diz que um consumidor prefere uma cesta que tenha, ao menos, uma quantia maior de algum dos ℓ bens. A propriedade (iii) nos diz que não existe um ponto de utilidade máxima local. Isto é, em cada vizinhança de cada cesta de bens existe uma outra cesta que lhe provém maior utilidade.

Outro tipo de comportamento que os consumidores podem apresentar, e que será importante para muitos teoremas, é a convexidade. Esta propriedade ocorre quando o consumidor gosta de diversificar. Por exemplo, se o consumidor tem preferências convexas e é indiferente entre 4 bananas e 2 maças então ele prefere 2 bananas e 1 maça a qualquer uma dessas duas possibilidades. Outra importante interpretação de convexidade será dada em capítulo posterior quando estudarmos a aversão ao risco.

Definição. Suponha X convexo.

(i) Dizemos que $\succcurlyeq$ é fracamente convexa se $x \succcurlyeq y$ e $1 \geq \lambda \geq 0$ então $\lambda x + (1-\lambda)y \succcurlyeq y$.

(ii) Dizemos que $\succcurlyeq$ é convexa se $x \succ y$ e $1 > \lambda > 0$ então $\lambda x + (1-\lambda)y \succ y$.

(iii) Dizemos que $\succcurlyeq$ é estritamente convexa se $x \sim y$, $x \neq y$ e $1 > \lambda > 0$ então $\lambda x + (1-\lambda)y \succ x$.

Observação: Se $\succcurlyeq$ é contínua então (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i). Para este resultado ver Debreu (1959).

Exemplo.

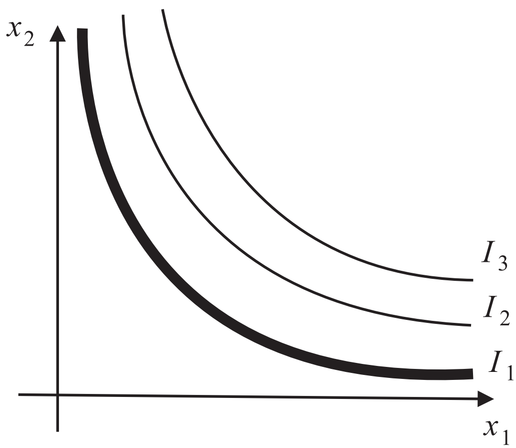


Figura 2

A preferência da Figura 2 acima, onde a curva de indiferença I_1 é "cheia", satisfaz a (i) mas não a (ii). A preferência dada por

$u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$ satisfaz a (ii) mas não a (iii). Se $u(x_1, x_2) = (x_1 + 1)(x_2 + 1)$ então $\succ_u$ satisfaz a (iii).

Vamos, a partir de agora, supor que o consumidor, além de uma preferência, possui uma cesta de bens $w \in X$, que interpretamos como sua dotação inicial: horas que pode trabalhar, imóveis, utensílios, etc. Vamos supor também que $X = \mathbb{R}^\ell_+$. Um sistema de preços (ou simplesmente um preço) é um elemento p em $\mathbb{R}^\ell_+$. A interpretação de p é óbvia: p_i significa a "quantia" que custa uma unidade do bem i. Uma cesta x custa, portanto, px. Dado um preço p, vamos supor que o consumidor conhece este preço (informação perfeita), como também pode comprar e vender sem afetar este preço. Isto é, vamos supor que o consumidor é passivo em relação aos preços. Obviamente, vamos supor que o consumidor tenha que pagar pelos bens adquiridos. Assim, o consumidor tem que restringir sua escolha ao conjunto das cestas de bens que são acessiveis ao seu poder de compra, dado por pw. Obtemos assim a chamada restrição orçamentária:

$$\gamma(p, w) = \{x \in \mathbb{R}^\ell_+, \quad px \leq pw\}.$$

Vamos tomar como hipótese o fato de o consumidor apresentar um comportamento racional, isto é, ele vai escolher os pontos, $\varphi(p, w)$, caso existam, de $\gamma(p, w)$ que maior satisfação lhe proporcionem. Dito de outra forma $\varphi(p, w)$ é uma correspondência (função que associa conjuntos a pontos) de demanda do consumidor é definida por

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbb{R}^\ell_+ \times \mathbb{R}^\ell_+ &\longrightarrow \mathbb{R}^\ell_+ \\ (p, w) &\longmapsto \varphi(p, w) = \{x \in \gamma(p, w) : \quad \forall\, y \in \gamma(p, w) \quad x \succcurlyeq y\}. \end{aligned}$$

Algumas propriedades de φ são imediatas. Inicialmente, notamos que se $\lambda > 0$ então $\gamma(\lambda p, \lambda w) = \gamma(p, w)$. Portanto, $\varphi(\lambda p, \lambda w) =$

$\varphi(p,w)$, isto é, φ é homogênea de grau zero. Logo, basta nos restringirmos a $p \in S_+^{\ell-1} = \{p \in \mathbb{R}_+^\ell, \quad \sum_{i=1}^{\ell} p_i = 1\}$. Um outro fato simples é que se $\succcurlyeq$ é localmente não saciada então $p \cdot \varphi(p,w) = p \cdot w$ (Lei de Walras). Neste caso o consumidor sempre gasta toda a sua renda, uma vez que com preferências localmente não saciada se $px < pw$ então existe $x' \succ x$ com $px' < pw$. Ainda, outra propriedade elementar é que se $\succcurlyeq$ é estritamente convexa então $\#\varphi(p,w) \leq 1$. Pois, se $x, y \in \varphi(p,w)$ e $x \neq y$, $x \sim y$ então, $0 < \lambda < 1 \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \succ x$, como também, $\lambda x + (1-\lambda)y \in \gamma(p,w)$ pois $p(\lambda x+)1-\lambda)y) = pw$, assim temos um absurdo.

Exemplo.

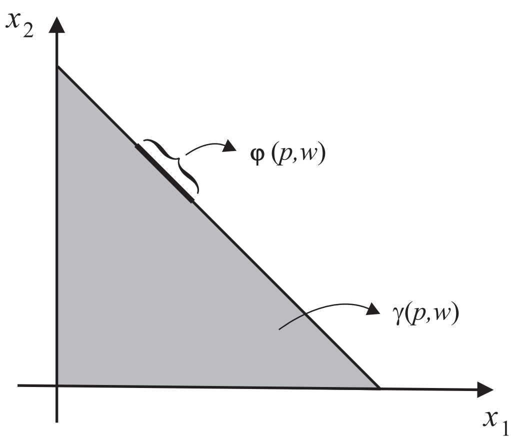


Figura 3

Suponhamos, agora, que $\succcurlyeq$ é contínua e que $\gamma := \gamma(p,w)$ seja limitado. Pelo teorema de Debreu, já discutido, existe uma representação $u_\succcurlyeq$ contínua. Notemos ainda que γ é limitado e, portanto, um compacto. Pelo teorema de Weierstrass temos que $u_\succcurlyeq$ atinge um máximo em γ e, neste caso, $\varphi(p,w) \neq \emptyset$. Mas se $p_i = 0$ para algum $i \in \{1,\ldots,\ell\}$, então γ é ilimitado e, neste caso, $\varphi(p,w)$ pode ser vazio.

Exemplo.

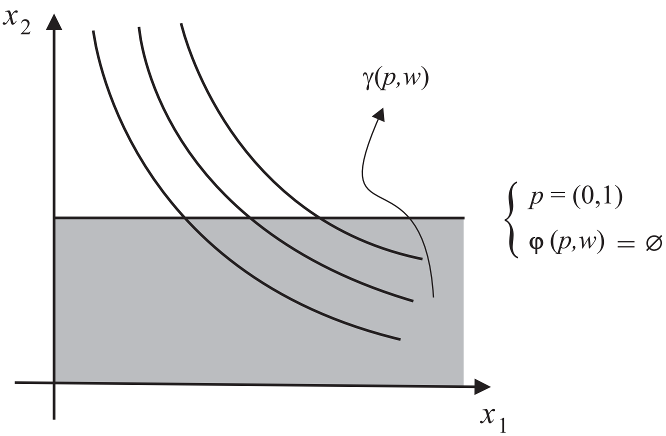


Figura 4

Para evitar este tipo de problema vamos definir para $M > 0$,

$$\gamma(p,w,M) = \{x \in \mathbb{R}^\ell_+, \quad px \leq pw, \quad ||x|| \leq M\}$$

e, respectivamente,

$$\varphi(p,w,M) = \{x \in \gamma(p,w,M), \quad \forall\, y \in \gamma(p,w,M) \quad x \succcurlyeq y\}.$$

Podemos, agora, demonstrar que a função de demanda restrita, que sempre existe, é contínua.

Teorema. *Seja $\succcurlyeq$ localmente não saciada, estritamente convexa e contínua. Suponha $w \gg 0$, então $\varphi(p,w,M)$ é contínua em p.*

Demonstração: Suponha φ descontínua em $p \in S_+^{\ell-1}$. Então, existe seqüência $\{p_n\}$ tal que $p_n \to p$ e $\varphi(p_n, w, M) \not\to \varphi(p, w, M)$. Como $||\varphi(p_n, w, M)|| \leq M$ podemos obter $\overline{z} \neq \varphi(p, w, M)$ e extrair subseqüência que ainda denotamos por p_n tal que $\varphi(p_n) \to \overline{z}$.

Como, $p_n\varphi(p_n, w, M) \leq p_n w$ e $||\varphi(p_n, w, M)|| \leq M$ temos que $p\overline{z} \leq pw$ e $||\overline{z}|| \leq M$ i.e., $\overline{z} \in \gamma(p, w, M)$. Portanto, $\varphi(p, w, M) \succ \overline{z}$. Pela continuidade de $\succcurlyeq$, existe $ve' \in (0, 1)$ tal que $\forall\, y \in B_{\varepsilon'}(\varphi(p, w, M))$ e $\forall\, z \in B_{\varepsilon'}(\overline{z})$, $y \succ z$. Em particular, existe n_0' tal que para todo $n \geq n_0'$

$$y \succ \varphi(p_n, w, M).$$

Como $\sum_{i=1}^{\ell} p_i = 1$ e $w \gg 0$ temos que $pw > 0$, seja $0 < \varepsilon < \min\{pw, \frac{\varepsilon'}{2M}, 1\}$ e $n_0 \geq n_0'$ tal que $n \geq n_0$

$$||p_n - p|| < \min\left\{\frac{\varepsilon^2}{2M}, \frac{\varepsilon^2}{2(||w|| + 1)}\right\}$$

e

$$y = (1 - \varepsilon)\varphi(p) + \frac{\varepsilon M w}{K}$$

para

$$K > \max\left\{||w||, \frac{Mpw}{pw - \varepsilon}\right\}.$$

Então,

$$||y - \varphi(p)|| \leq \varepsilon||\varphi(p)|| + \varepsilon M \leq 2\varepsilon M < \varepsilon'$$

logo, $y \in B_\varepsilon'(\varphi(p))$ e por conseguinte

$$y \succ \varphi(p_{n_0}, w, M). \tag{*}$$

Mas, $||y|| \leq M$ e,

$$\begin{aligned}
p_{n_0}y - p_{n_0}w &= (1-\varepsilon)p_{n_0}\varphi(p) + \frac{\varepsilon M p_{n_0} w}{K} - p_{n_0}w \\
&\leq (1-\varepsilon)p\varphi(p) + (1-\varepsilon)\frac{\varepsilon^2}{3M}M + \frac{\varepsilon M p w}{K} \\
&\quad + \frac{\varepsilon M}{K}\frac{\varepsilon^2||w||}{3M} - pw + \frac{\varepsilon^2||w||}{3(||w||+1)} \\
&< \left[1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon M}{K} - 1\right]pw + (1-\varepsilon)\frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{\varepsilon^3}{3} + \frac{\varepsilon^2}{3} \\
&< \left[\frac{\varepsilon M}{K} - \varepsilon\right]pw + \frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{\varepsilon^2}{3} \\
&= \left\{\left[\frac{M}{K} - 1\right]pw + \varepsilon\right\}\varepsilon < 0,
\end{aligned}$$

pois, $\varepsilon < \left[1 - \frac{M}{K}\right]pw$ uma vez que $K > \frac{Mpw}{pw-\varepsilon}$. Mas,

$$p_{n_0}y \leq p_{n_0}w, \quad ||y|| \leq M$$

e por (*) chegamos numa contradição.

Exemplo: Vamos tomar um consumidor com função de utilidade $u(x_1,(x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$.

(a) Supondo dotação $w = (1,0)$ e preços $p = (p_1, 1-p_1)$ obtemos que:

$$\varphi(p,w,2) = \begin{cases} \left(1-p_1, \frac{p_1^2}{(1-p_1)}\right) & \text{se } \frac{p_1^2}{1-p_1} \leq 2, \quad \text{e } 0 < p_1 < 1 \\ \\ (2,0) & \text{se } p_1 = 0 \end{cases}$$

Notemos que a demanda é descontínua devido ao fato de $w_2 = 0$.

(b) Supondo agora uma outra dotação $w = (1,1)$, obtemos que:

$$\varphi(p, w, 2) = \begin{cases} \left(\frac{1-p_1}{p_1}, \frac{p_1}{1-p_1}\right) & \text{se } \frac{1-p_1}{p_1} \leq 2, \quad 0 < p_1 < 1, \quad \text{ e } \frac{p_1}{1-p_1} \leq 2 \\ \left(2, \frac{1-2p_1}{1-p_1}\right) & \text{se } \frac{1-p_1}{p_1} \geq 2. \end{cases}$$

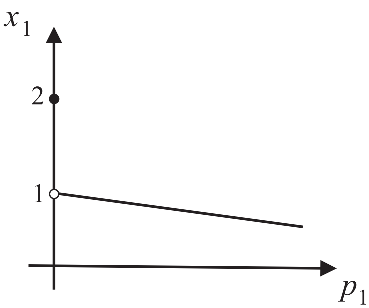


Figura 5

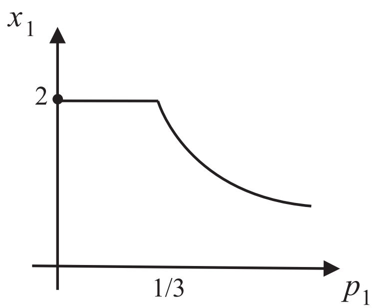


Figura 6

Vemos que, nesse caso, φ é contínua devido ao fato de que $w >> 0$.

(c) A firma competitiva.

Vamos estudar, agora, o comportamento das firmas.

Definição. Uma firma é caracterizada por uma tecnologia, que é um conjunto $Y \subset \mathbb{R}^\ell$, tal que:

(i) Y é convexo

(ii) Y é compacto

(iii) $0 \in Y$

A interpretação econômica de uma firma como definida acima é simples: Y é o conjunto dos pontos nos quais a firma possa operar; se $y_i \leq 0$ a firma está usando o bem i como insumo para produção, se $y_i \geq 0$ a firma está produzindo o bem i.

A convexidade de Y pode ser justificada da seguinte forma: se a firma pode operar em y_1 e em y_2 então ela pode operar utilizando dois terços dos insumos que utiliza em y_1 mais um terço dos insumos que utiliza em y_2, para produzir dois terços do produto que obtém em y_1 e um terço do produto de y_2. A hipótese de Y ser limitado é bastante restritiva e não é necessária para os teoremas a seguir. Nós a adotamos aqui com o objetivo de simplificar algumas demonstrações. A hipótese de que $0 \in Y$ diz que a firma pode deixar de operar sem incorrer em custos, i.e., não existem custos fixos[1]. Dado um preço $p \in S_+^{\ell-1}$ e uma atividade $y \in Y$, o lucro da firma é definido por py. Podemos escrever py como a soma de dois termos: o primeiro, positivo, indicando a receita: $\sum_{\{i, y_i \geq 0\}} p_i y_i$; e o segundo, negativo, indicando a despesa: $\sum_{\{i, y_i < 0\}} p_i y_i$. Obviamente, o lucro da firma é a receita menos a despesa da firma. O problema da firma é o de buscar os níveis de atividade $\psi(p, Y)$ que maximize seus lucros:

$$\max_{y \in Y} p \cdot y.$$

Como Y é compacto o problema acima tem solução.

A hipótese (iii) serve para assegurar que a firma pode operar sem prejuízos, uma vez que $p\psi(p, Y) \geq p \cdot 0 = 0$.

Vejamos alguns exemplos:

---

[1]Podemos ver os custos fixos como aqueles que permanecem quando a firma está inativa.

Exemplo 1.

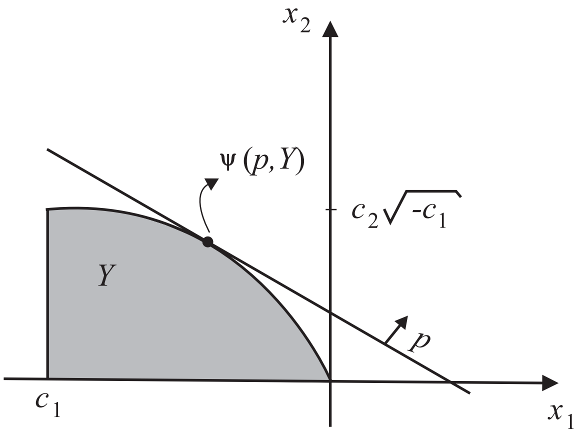


Figura 7

$$Y = \{(x_1, x_2), \quad c_1 \le x_1 \le 0, \quad 0 \le x_2 \le c_2\sqrt{-x_1}\}$$

$$\psi(p, Y) = \left(-\left(\frac{c_2 p_2}{2p_1}\right)^2, \frac{c_2^2 p_2}{2p_1} \right), \quad \text{se} \quad p_1 \neq 0, \quad \frac{p_2 c_2}{2p_1} \le \sqrt{-c_1}$$

$x_1 =$ horas de trabalho, $\quad x_2 =$ toneladas de milho,

$$c_1 < 0, \quad c_2 > 0.$$

Exemplo 2.

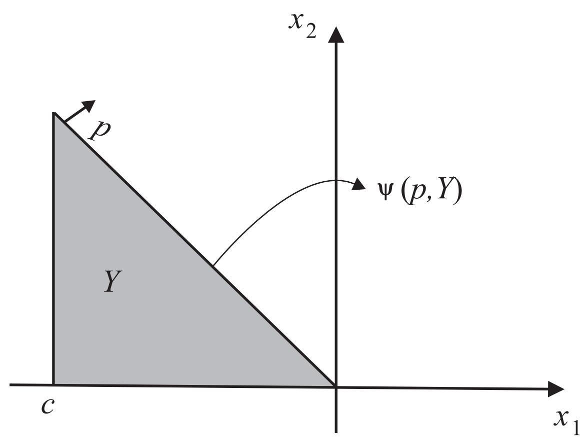


Figura 8

$$Y = \{(x_1, x_2), \quad c \le x_1 \le 0, \quad 0 \le x_2 \le -x_1\}$$
$$c < 0, \quad p_1 = p_2,$$
$$\psi(p, Y) = \{(x_1, x_2), \quad C \le x_1 \le 0, \quad x_2 = -x_1\}.$$

Uma das conveniências da definição de tecnologia de uma firma, por um conjunto, ao invés de uma função de produção (i.e., uma função que associa insumos a um único produto) é a possibilidade da existência de produção conjunta, como o exemplo a seguir ilustra.

Exemplo 3.

$$Y = \{(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad c_1 \le x_1 \le 0, \quad c_2 \le x_2 \le 0,$$
$$0 \le x_3 + x_4 \le c_3\sqrt{(-x_1)(-x_2)}\}.$$

$$c_1 < 0, \quad c_2 < 0, \quad c_3 > 0,$$

$$x_1 = \text{ horas de trabalho},$$

$$x_2 = \text{ hectares de terra}, \quad x_3 = \text{ toneladas de milho},$$

$$x_4 = \text{ toneladas de soja}.$$

Como vemos pelo Exemplo 2 acima $\psi(p, Y)$ pode ser um conjunto com mais de um ponto, o que nos motiva as definições a seguir.

Definição: Seja $X \subset \mathbb{R}^\ell$, $Y \subset \mathbb{R}^n$. Uma correspondência ou função multivoca, φ, é uma relação que associa pontos de X a subconjuntos de Y

$$\begin{aligned} \varphi\colon X &\to Y \\ x &\to \varphi(x) \subset Y. \end{aligned}$$

Definição. Uma correspondência $\varphi\colon X \to Y$ é dita semi-contínua superior (s.c.s.) em $x \in X$ se para todas seqüências $x_n \in X$ e $y_n \in \varphi(x_n)$ tais que $x_n \to x$ e $y_n \to y$, tenhamos que $y \in \varphi(x)$. Diremos que $\varphi\colon X \to Y$ é s.c.s. se esta for s.c.s. para todo $x \in X$.

Exemplo 4.

$$\varphi(x) = \begin{cases} [1,2] & 0 \leq x \leq 3 \\ [1/2, 5/2] & x \geq 3 \end{cases}$$

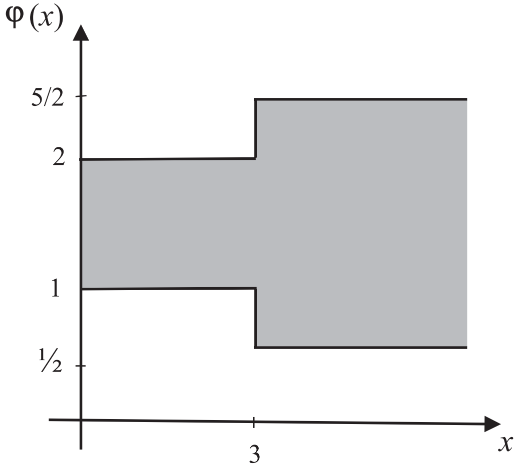


Figura 9

Exemplo 5.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \{\frac{1}{1-x}\} & 0 \leq x < 1 \\ \{0\} & x = 1 \end{cases}$$

No Exemplo 4 temos uma correspondência s.c.s.. Notemos que dado $\varepsilon > 0$, $\varphi(x) \subseteq \varphi(3)$, para todo x em $(3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon)$. A idéia de s.c.s. em um ponto x_0 é que φ "pode expandir" em x_0.

No Exemplo 5 temos uma correspondência que, de fato, é uma função ($\#\varphi(x) = 1$, $\forall\, x \in [0,1]$). Notemos que φ é s.c.s. mas φ vista como uma função, não é contínua. Todavia, sob condições de φ s.c.s. e $\#\varphi(x) = 1\ \forall\, x \in X$, basta que Y seja compacto para que φ, vista como uma função, seja contínua; vide exercício 6 no final deste capítulo.

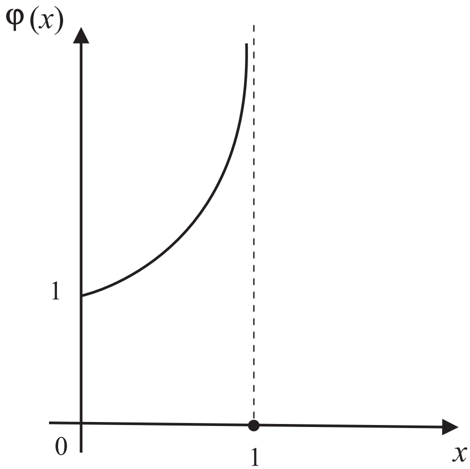


Figura 10

Observação: Definimos o gráfico da correspondência $\varphi\colon X \to Y$ como:

$$G_\varphi = \{(x, y) \in X \times Y : y \in \varphi(x)\}$$

é fácil ver que G_φ é fechado em $X \times Y$ se, e somente se, φ é s.c.s.

Definição. Uma correspondência $\varphi\colon X \to Y$ é dita semi-contínua inferior (s.c.i.) em x se para toda seqüência $x_n \in X$ com $x_n \to x$ e $y \in \varphi(x)$, existir subseqüência, y_{n_k}, com $y_{n_k} \in \varphi(x_{n_k})$ tal que $y_{n_k} \to y$.

Diremos que φ é s.c.i. se esta for s.c.i. para todo $x \in X$.

Exemplo.

$$\varphi(x) = \begin{cases} [1,4] & 0 \leq x < 2 \\ [2,3] & x \leq 2 \end{cases}$$

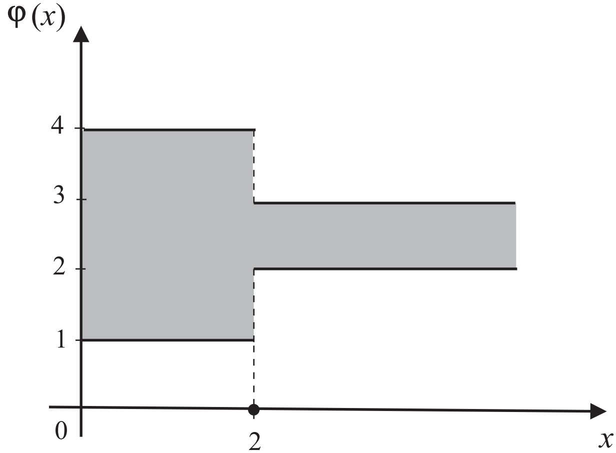


Figura 11

O exemplo é de uma correspondência s.c.i. . Notemos que dado $\varepsilon > 0$, $\varphi(2) \subseteq \varphi(x)$ para todo $x \in (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$. A idéia de s.c.i. em um ponto x_0 é que φ "pode contrair" em x_0.

Ainda, é fácil ver que as correspondências dos dois exemplos de s.c.s.não são s.c.i. . Diferentemente do caso de s.c.s., uma correspondência s.c.i. que, de fato, for uma função é contínua, mesmo que Y não seja compacto; vide Exercício 7 no final deste capítulo.

Definição. Uma correspondência $\varphi\colon X \to Y$ é contínua quando esta for s.c.s. e s.c.i..

Teorema. *Seja $u\colon S \times T \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\varphi\colon S \to T$ uma correspondência s.c.i. e com valores compactos. Seja*

$$\psi(x) = \{y \in \varphi(x) \mid u(x,y) = \max_{z \in \varphi(x)} u(x,z)\}$$

então ψ é s.c.s.

Exemplo. $S = S_+^{\ell-1}$, $T = Y$ compacto e convexo, $\varphi(p) = Y$, $\forall\, p \in S_+^{\ell-1}$, $u(p,y) = p \cdot y$. Então $\psi(p) = \text{argmax}_{y \in Y} p \cdot y$ é s.c.s.

Um dos exercícios deste capítulo mostra como obter a continuidade da correspondência de demanda, ao obtermos que a correspondência $p \to \gamma(p,w)$ é s.c.s. Relembramos que obtemos uma correspondência de demanda, e não uma função, ao relaxarmos a hipótese de convexidade estrita da preferência do consumidor.

Demonstração do teorema: Seja $x_n \to x$, $y_n \to y$, $y_n \in \psi(x_n)$. Necessitamos mostrar que $y \in \psi(x)$. Isto é, precisamos mostrar

$$\forall\, z \in \varphi(x), \quad u(x,z) \leq u(x,y).$$

Como φ é s.c.i., $x_n \to x$ e $z \in \varphi(x)$ acarretam a existência de $z_{n_k} \in \varphi(x_{n_k})$ com $z_{n_k} \to z$.

Por conseguinte

$$u(x_{n_k}, x_{n_k}) \leq u(x_{n_k}, y_{n_k}).$$

Logo, pela continuidade de u

$$u(x,z) \leq u(x,y).$$

Para que $\psi(p,Y)$ seja uma função basta exigirmos que Y seja estritamente convexo, o que definimos a seguir.

Definição. Seja $Y \subset \mathbb{R}^\ell$ tal que $\overset{\circ}{Y} \neq \emptyset$. Y é dito estritamente convexo se $\forall\, x, y \in Y$ e $\forall\, 0 < \lambda < 1 \quad \lambda x \in (1-\lambda)y \in \overset{\circ}{Y}$.

Exemplo.

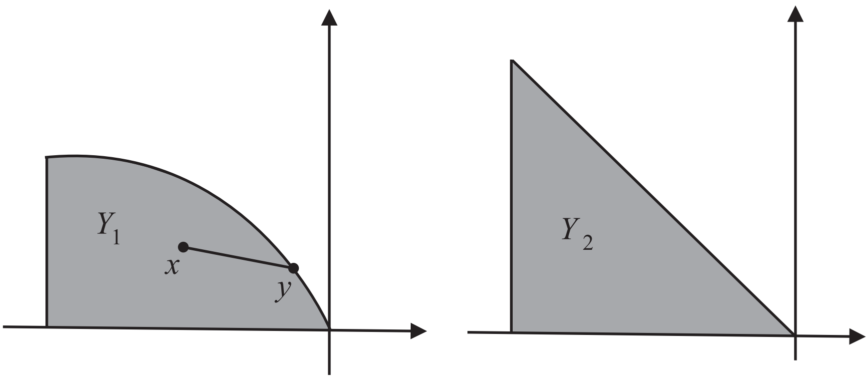


Figura 12

Notemos que Y_1 é estritamente convexo, porém Y_2 é apenas convexo, mas não estritamente.

Sendo Y estritamente convexo, é fácil de ver que $\psi(p, Y)$ é uma função (ver exercícios) que é contínua; isto decorre do fato desta ser uma correspondência s.c.s. a valores contidos no compacto Y, por fim, temos que $\#\psi(p, Y) = 1$, $\forall\, p \in S_+^{\ell-1}$. Um outro exercício mostra que a demanda do consumidor no caso em que ele tem uma participação nos lucros das firmas permanece contínua.

Exercícios

1. Mostre que se X é metrizável então $\succcurlyeq$ é contínua se, e somente se, $\forall\, x \in X$, $\{y, y \succcurlyeq x\}$ e $\{y, x \succcurlyeq y\}$ são fechados.

2. Por que o exemplo da ordem lexicográfica não contradiz o

teorema de representação de preferências dado no início do capítulo?

3. Demostre que u e v utilidades em $\mathbb{R}^\ell_+$, contínuas e estritamente monótonas representam a mesma preferência se e só se existir $f\colon u(\mathbb{R}^\ell_+) \to \mathbb{R}$ estritamente crescente tal que $v = f \circ u$.

   Sugestão: Seja $\Delta = \{(\lambda, \dots, \lambda) \in \mathbb{R}^\ell : \quad \lambda \geq 0\}$. Se $u(\lambda, \dots, \lambda) = x$ seja $f(x) = v(\lambda, \dots, \lambda)$. Então, $v/\Delta = f \circ u/\Delta$. Se $x \in \mathbb{R}^\ell_+$, então, $u(0) \leq u(x) \leq u(\max\limits_{1 \leq i \leq \ell} x_i, \dots, \max\limits_{1 \leq i \leq \ell} x_i))$ como u é monótona e contínua em Δ, existe $0 \leq \lambda_x \leq \max x_i$ tal que $u(\lambda_x, \dots, \lambda_x) = u(x)$. Logo, $f \circ u(x) = v(\lambda_x, \dots, \lambda_x) = v(x)$.

4. Seja $\succcurlyeq$ estritamente monótona, e contínua em $\mathbb{R}^\ell_+$. Dê outra demonstração da existência de $u_\succcurlyeq$ contínua.

   Sugestão: Dado $x = (\lambda, \dots, \lambda)$, $\lambda \geq 0$, seja $u_\succcurlyeq(x) = \lambda$. Dado $x \in \mathbb{R}^\ell_+$ qualquer, considere $I^+ = \{\lambda : (\lambda, \dots, \lambda) \succcurlyeq x\}$ e $I^- = \{\lambda : (\lambda, \dots, \lambda) \preccurlyeq x\}$, pela continuidade de $\succcurlyeq$, I^+ e I^- são fechados, $0 \in I^-$, $\left(\max\limits_{1 \leq i \leq \ell} x_i, \dots, \max\limits_{1 \leq i \leq \ell} x_i\right) \in I^+$, $I^+ \cup I^- = \mathbb{R}_+$, logo, por convexidade, existe $\lambda_x \in I^+ \cap I^-$, que é único por monotonicidade estrita. Seja $u_\succcurlyeq(x) = \lambda_x$. Para a demonstração de continuidade considere os conjuntos da forma $u^{-1}((0, \lambda])$, $u^{-1}([\lambda, \infty))$.

5. Suponha que $u\colon \mathbb{R}^\ell_+ \to \mathbb{R}$ admita uma extensão a um aberto contendo $\mathbb{R}^\ell_+$, duas vezes continuamente diferenciável. Suponha que $\forall\, x \in \mathbb{R}^\ell_+$ $hd^2u(x)h < 0$ se $Du(x)h = 0$, $h \neq 0$, o que é uma forma forte de quasi-concavidade. Suponha que $\forall\, (p, r) \in \mathbb{R}^\ell_{++} \times \mathbb{R}_{++}$, $\varphi(p, r) \in \mathbb{R}^\ell_{++}$. Demonstre que $\varphi(p, r)$ é C^1 em $\mathbb{R}^\ell_{++} \times \mathbb{R}_{++}$. Prove a recíproca, i.e., se $\varphi(p, r) \in C^1$ então $hD^2u(x)h < 0$, $\forall\, h$ tal que $Du(x)h = 0$, $h \neq 0$.

Sugestão: Mostre que esta condição é necessária e suficiente para a invertibilidade requerida para o uso do teorema da função implícita.

Obs.: $\varphi(p,r)$ é definida como a solução de $\max_{\{x\in\mathbb{R}^\ell_+, px=r\}} u(x)$.

6. Demonstre que se φ é uma função s.c.s., $\varphi\colon X \to Y$, Y compacto, então φ é contínua.

7. Demonstre que se $\varphi\colon X \to Y$ é uma função s.c.i., então φ é contínua.

8. Mostre que se φ é função contínua, então φ é s.c.s. e s.c.i.

9. Mostre que nas condições do último teorema deste capítulo, a função $V(x) = \max_{z\in\varphi(x)} u(x,z)$ é contínua.

   Sugestão: Mostre que $x \to (x, \psi(x))$ é s.c.s. por ser composição de duas correspondência s.c.s. e use o Exercício 6.

10. Mostre que se $w \gg 0$ então $p \to \gamma(p, w, M)$ é s.c.s.

11. Prove que se Y é estritamente convexo então $\psi(p, Y)$ é uma função, que é contínua.

12. Suponha que $\psi(p, Y)$ é uma função, como é o caso se Y_j for estritamente convexo, $j = 1, \dots, m$. Dado $p \in S^{\ell-1}_+$. Seja $R_i(p) = pw_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} p\psi(p, Y_j)$ a renda do consumidor i no caso de ele possuir a participação $\theta_{ij} \geq 0$ nos lucros da firma j. Suponha $R_i(p) > 0$ em uma vizinhança de $\overline{p} \in S^{\ell-1}_+$, como é o caso se $w_i \gg 0$. Mostre, com uma pequena modificação de um teorema foi provado, que $\varphi(p, \succ_i, w_i)$, definida como o ótimo de $\succsim_i$ em $\{x \in \mathbb{R}^\ell_+, \quad px \leq R_i(p)\}$, é contínua em $\overline{p}$. Faça as hipóteses necessárias em $\succsim_i$.

2. AS DECISÕES NA PRESENÇA DE INCERTEZA

Nesta seção vamos considerar o espaço de consumo, X, como sendo o conjunto de medidas de probabilidades sobre um espaço de bens básico, Ω. Assim, por exemplo, X pode ser pensado como o conjunto das probabilidades ou loterias sobre o conjunto de bens $\Omega = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Ao escolher uma loteria, $x = (p_1, \ldots, p_n) \in X$, o consumidor tem direito a receber o bem a_i com probabilidade p_i.

Formalmente, temos um espaço de bens básicos Ω munido com uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ e X é o conjunto das medidas de probabilidades sobre Ω. Os leitores não familiarizados com a teoria da integração podem considerar Ω como tendo um número finito de elementos e $\mathcal{F}$ como sendo o conjunto das partes de Ω, isto é, $\mathcal{F} = \{A : A \subseteq \Omega\} = 2^{\Omega}$.

(a) A teoria da utilidade esperada de Von Neumann e Morgenstern.

Seja $\succcurlyeq$ uma preferência nacional em X. Pela seção anterior sabemos que, sob certas hipóteses existe função de utilidade $u_{\succcurlyeq}\colon X \to \mathbb{R}$, representando $\succcurlyeq$. Nesta seção, estamos interessados na possibilidade de uma representação mais explícita para $\succcurlyeq$. Queremos saber se existe $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, tal que para $x \in X$,

$$u_{\succcurlyeq}(x) = \int_{\Omega} u(\omega)x(d\omega),$$

ou, no caso finito, em que $\#\Omega = a < \infty$, $u_{\succcurlyeq}(x) = \sum_{i=1}^{a} u(\omega_i)p_{\omega_i}$, onde

p_{ω_i} é a probabilidade de obter ω_i e $x = (p_{\omega_1}, \ldots, p_{\omega_a})$. Isto é, $u_{\succcurlyeq}$, que representa $\succcurlyeq$ é a utilidade esperada, de manejo analítico muito mais simples que uma utilidade abstrata em Ω.

A idéia de uma utilidade linear com respeito às probabilidades (i.e. tal que para $0 \leq \lambda \leq 1$, $u_{\succcurlyeq}(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda u_{\succcurlyeq}(x) + (1-\lambda)u_{\succcurlyeq}(y))$ remonta pelo menos a Bernoulli com sua expectativa moral. Contudo, os primeiros a axiomatizá-la foram Von-Neumann e Morgenstern em Theory of Games and Economic Behaviour (1944). A formulação que apresentamos aqui é devida a Herstein e Milnor (1963).

A fórmula da utilidade esperada será usada posteriormente nesta seção para o estudo da aversão ao risco e do ordenamento dos riscos.

Vamos necessitar de dois axiomas muito fortes e, como veremos adiante, controvertidos.

(A-1) Continuidade: $\forall\, x, y, z \in X$, $\{\lambda \in [0,1] : \quad \lambda x + (1-\lambda)y \succcurlyeq z\}$ e $\{\lambda \in [0,1] : \quad \lambda x + (1-\lambda)y \preccurlyeq z\}$ são fechados.

(A-2) Independência: Se $x \sim y$ então $\forall\, z \in X$, $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$\lambda x + (1-\lambda)z \sim \lambda y + (1-\lambda)z.$$

O Axioma da Independência tem sido mito criticado e experimentos realizados têm mostrado que ele é rejeitado, em muitas situações, por indivíduos submetidos à teste. O mais notável crítico da teoria da utilidade esperada é sem dúvida M. Allais. A seguir passamos a descrever algumas dessas objeções.

Suponhamos que um indivíduo tenha a possibilidade de escolher entre 1 milhão de reais com probabilidade um e a loteria que lhe dê 0 reais com probabilidade p e 10^{10} milhões de reais com probabilidade $1-p$. Se ele possuir uma utilidade esperada ele vai preferir a segunda alternativa se $pu(0)+(1-p)u(10^{10}) > u(1)$, i.e. se $p < \frac{u(10^{10})-u(1)}{u(10^{10})-u(0)}$. Isto parece um contrasenso, uma vez que a primeira alternativa já lhe garantia 1 milhão de reais com certeza e se pode ter probabilidades altas de receber nada, uma vez que $\frac{u(10^{10})-u(1)}{u(10^{10})-u(0)}$ pode estar próximo de 1 (ou pelo menos, longe do zero).

A hipótese de continuidade tem sido criticada por acarretar fatos não intuitivos como: se um indivíduo preferir um mil reais (y) a 100 reais (z) ele prefere ser morto (x) com certa probabilidade $\lambda > 0$ e receber um mil reais com probabilidade $1-\lambda$ a receber 100 reais. Formalmente: $y > z \Rightarrow \exists\, \lambda > 0$ tal que $\lambda x(1-\lambda)y > z$.

Estas objeções nos devem fazer cautelosos com respeito a teoria da utilidade esperada, que contudo continua a ser muito importante devido à sua operacionalidade. Convém, também, ressaltar a importância de trabalhos como o de Machina (1982) que procurou relaxar a hipótese de independência $(A-2)$ e, portanto, a utilidade esperada.

Podemos agora demonstrar o

Teorema. (Existência da utilidade linear). *Se a preferência $\succcurlyeq$ é completa em X e satisfaz (A-1) e (A-2), então existe $u_{\succcurlyeq} : X \to \mathbb{R}$ tal que $\forall\, 0 \leq \lambda \leq 1\ \forall\, x, y \in X\ u_{\succcurlyeq}(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda u_{\succcurlyeq}(x) + (1-\lambda)u_{\succcurlyeq}(y)$.*

Ademais, se $u'_{\succcurlyeq}$ também é utilidade linear para $\succcurlyeq$ então existem $r > 0$, $t \in \mathbb{R}$ tal que $u_{\succcurlyeq} = u'_{\succcurlyeq} r + t$.

Demonstração: Vamos supor, inicialmente, que existem um maior elemento $\overline{x}$ e menor elemento $\underline{x}$. Isto é, $\forall\, x \in X$, $\underline{x} \preccurlyeq x \preccurlyeq \overline{x}^{(*)}$. A demonstração está dividida em várias afirmações.

Afirmação 1. Se $x \in X$ então existe $0 \leq \lambda \leq 1$ tal que $x \sim \lambda\overline{x} + (1-\lambda)\underline{x}$.

Demonstração de 1. Seja $\overline{\psi} = \{\lambda \in [0,1] : \quad \lambda\overline{x} + (1-\lambda)\underline{x} \succcurlyeq x\}$ que é não vazio, e fechado por (A-1). Seja $\underline{\psi} = \{\lambda \in [0,1] : \quad \lambda\overline{x} + (1-\lambda)\underline{x} \preccurlyeq x\}$ que também é não vazio e fechado. Como $\succcurlyeq$ é completa $\overline{\psi} \cup \underline{\psi} = [0,1]$ logo, $\overline{\psi} \cap \underline{\psi} \neq \emptyset$, pois $[0,1]$ é conexo. Isto é, existe λ tal que $\lambda\overline{x} + (1-\lambda)\underline{x} \sim x$.

Afirmação 2. Se $x \succ y$ e $0 < \lambda < 1$ então $x \succ \lambda x + (1-\lambda)y$.

Demonstração de 2. Suponha por absurdo $z = \lambda x + (1-\lambda)y \succcurlyeq x \succ y$. Da demonstração da Afirmação 1, sabemos que existe $\mu \in [0,1]$ tal que

$$\begin{aligned} x \sim \mu z + (1-\mu)y &= \mu\lambda x + \mu(1-\lambda)y + (1-\mu)y \\ &= \mu\lambda x + [\mu(1-\lambda) + (1-\mu)]y \\ &= \mu\lambda x + (1-\mu\lambda)y. \end{aligned}$$

Seja $\psi = \{\mu' \in [0,1] \mid x \sim \mu'\lambda x + [1-\mu'\lambda]y\}$. O argumento acima mostra que ψ é não vazio e fechado, por (A-1).

Logo, existe $\mu_0 = \min\limits_{\mu' \in \psi} \mu'$. Seja

$$x_{\mu_0} = \mu_0\lambda x + [\mu_0(1-\lambda) + (1-\mu_0)]y \sim x.$$

Por (A-2)

$$\begin{aligned} z &= \lambda x + (1-\lambda)y \sim \lambda x_{\mu_0} + (1-\lambda)y \\ &= \lambda\mu_0\lambda x + \lambda(1-\mu_0\lambda)y + (1-\lambda)y \\ &= \lambda^2\mu_0 x + (1-\lambda^2\mu_0)y. \end{aligned}$$

Mas $x \sim \mu z + (1-\mu)y$ e por (A-2):

$$\begin{aligned} x \sim \mu z + (1-\mu)y &\sim \mu[\lambda^0\mu_0\lambda x + (1-\lambda^2\mu_0)y] + (1-\mu)y \\ &= \mu\lambda^2\mu_0 x + [1-\mu\lambda^2\mu_0]y. \end{aligned}$$

Como $\lambda < 1$ e, portanto, $\mu\lambda^2\mu_0 < \mu\mu_0 \leq \mu_0$ temos contradição com a definição de μ_0.

Afirmação 3. Se $x \succ y$ então $1 \geq \lambda > \mu \geq 0 \Leftrightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \succ \mu x + (1-\mu)y$.

Demonstração de 3. Seja $x \succ y$ e $\lambda > \mu \geq 0$. Então, por fato análogo a 2, $\lambda x + (1-\lambda)y \succ y$. Como $\frac{\mu}{\lambda} < 1$, novamente, por 2 tem-se

$$\lambda x + (1-\lambda)y \succ \frac{\mu}{\lambda}[\lambda x + (1-\lambda)y] + \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) y = \mu x + (1-\mu)y.$$

Reciprocamente, se $\mu \geq \lambda$, o argumento acima mostra que

$$\mu x + (1-\mu)y \succsim \lambda x + (1-\lambda)y$$

o que contradiz a hipótese de que $\lambda x + (1-\lambda)y \succ \mu x + (1-\mu)y$.

Por 3 tem-se, imediatamente,

Afirmação 4. Se $x \in X$ então existe único λ_x tal que $x \sim \lambda_x \overline{x} + (1-\lambda_x)\underline{x}$.

Seja $u_{\underline{x},\overline{x}}(x) = \lambda_x$ como na Afirmação 4, então:

Afirmação 5.

(i) $x \succ y \Leftrightarrow u_{\underline{x},\overline{x}} > u_{\underline{x},\overline{x}}(y)$.

(ii) $u_{\underline{x},\overline{x}}(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda u_{\underline{x},\overline{x}}(x) + (1-\lambda)u_{\underline{x},\overline{x}}(y), \quad \forall\, \lambda \in [0,1]$

Demonstração de 5. (i) é imediato a partir de 3. Seja

$$y \sim u_{\underline{x},\overline{x}}(y)\overline{x} + (1 - u_{\underline{x},\overline{x}}(y))\underline{x}.$$

Usando (A-2) repetidas vezes, tem-se:

$$\begin{aligned}
&\lambda x + (1-\lambda)y \\
&\sim \lambda[u_{\underline{x},\overline{x}}(x)\overline{x} + (1 - u_{\underline{x},\overline{x}}(x))\underline{x}] + (1-\lambda)[u_{\underline{x},\overline{x}}(y)\overline{x} + (1 - u_{\underline{x},\overline{x}}(y))\underline{x}] \\
&\sim [\lambda u_{\underline{x},\overline{x}}(x) + (1-\lambda)u_{\underline{x},\overline{x}}(y)]\overline{x} + [1 - [\lambda u_{\underline{x},\overline{x}}(x) + (1-\lambda)u_{\underline{x},\overline{x}}(y)]]\overline{x}.
\end{aligned}$$

Logo, pela definição,

$$u_{\underline{x},\overline{x}}(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda u_{\underline{x},\overline{x}}(x) + (1-\lambda)u_{\underline{x},\overline{x}}(y).$$

Afirmação 6 (Unicidade). Sejam $u_{\underline{x},\overline{x}}$ e $u'_{\underline{x},\overline{x}}$ representando $\succcurlyeq$. Seja

$$r = \frac{u_{\underline{x},\overline{x}}(\overline{x}) - u_{\underline{x},\overline{x}}(\underline{x})}{u'_{\underline{x},\overline{x}}(\overline{x}) - u'_{\underline{x},\overline{x}}(\underline{x})}$$

e

$$t = u_{\underline{x},\overline{x}}(\underline{x}) - r u'_{\underline{x},\overline{x}}(\underline{x}).$$

Então,

$$u_{\underline{x},\overline{x}} = r u'_{\underline{x},\overline{x}} + t.$$

Demonstração: Seja $x \in X$ então existe λ tal que

$$x \sim \lambda\overline{x} + (1-\lambda)\underline{x}.$$

Logo, por linearidade,

$$\begin{aligned}
&u_{\underline{x},\overline{x}}(x) - ru'_{\underline{x},\overline{x}}(x)\\
&= \lambda u_{\underline{x},\overline{x}}(\overline{x}) + (1-\lambda)u_{\underline{x},\overline{x}}(\underline{x})\\
&\quad - \frac{u_{\underline{x},\overline{x}}(\overline{x}) - u_{\underline{x},\overline{x}}(\underline{x})}{u'_{\underline{x},\overline{x}}(\overline{x}) - u'_{\underline{x},\overline{x}}(\underline{x})}[\lambda u'_{\underline{x},\overline{x}}(\overline{x}) + (1-\lambda)u'_{\underline{x},\overline{x}}(\underline{x})]\\
&= u_{\underline{x},\overline{x}}(\underline{x}) - ru'_{\underline{x},\overline{x}}(\underline{x}) = t,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Podemos, agora, demonstrar o caso geral. Isto é, o caso em que X não possui os elementos maximais $\underline{x}$ e $\overline{x}$.

Sejam $\underline{x}$ e $\overline{x}$, $\underline{x} \succ \overline{x}$ fixos. (Se $\forall\ x, y \in X$, $x \sim y$, a demonstração é trivial). Dado $x \in X$ existem $\underline{y}$ e $\overline{y}$ tais que $\underline{y} \preccurlyeq x \preccurlyeq \overline{y}$ e $\underline{y} \preccurlyeq \underline{x} \preccurlyeq \overline{x} \preccurlyeq \overline{y}$. Defina

$$v_{\underline{y},\overline{y}}(x) = \frac{u_{\underline{y},\overline{y}}(x) - u_{\underline{y},\overline{y}}(\underline{x})}{u_{\underline{y},\overline{y}}(\overline{x}) - u_{\underline{y},\overline{y}}(\underline{x})},$$

então, v representa $\succcurlyeq$ em $\underline{y} \preccurlyeq y \preccurlyeq \overline{y}$, e é linear. Pela unicidade (Afirmação 6) v não depende do par $\underline{y}, \overline{y}$ escolhido uma vez que sempre $v_{\underline{y},\overline{y}}(\underline{x}) = 0$ e $v_{\underline{y},\overline{y}}(\overline{x}) = 1$ o que acarreta $v_{\underline{y},\overline{y}}(x) = v_{\underline{y}',\overline{y}'}(x)$ para qualquer ou par $\underline{y}', \overline{y}'$ tal que $\underline{y}' \preccurlyeq x \preccurlyeq \overline{y}'$ e $\underline{y}' \preccurlyeq \underline{x} \prec \overline{x} \preccurlyeq \overline{y}'$. A prova do teorema está portanto concluída.

Para a obtenção da fórmula da utilidade esperada no caso $a = \#\Omega < \infty$ basta definir, para $\omega \in \Omega$

$$u(\omega) = u_{\succcurlyeq}(\delta_{\{\omega\}}).$$

Pois, se $x = \sum_{i=1}^{a} p_{\omega_i} \delta_{\{\omega_i\}}$, então, por linearidade,

$$\begin{aligned} U_{\succcurlyeq}(x) &= U_{\succcurlyeq}\left(\sum_{i=1}^{a} p_{\omega_i} \delta_{\{\omega_i\}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{a} p_{\omega_i} u(\delta_{\{\omega_i\}}) \\ &= \sum_{i=1}^{a} p_{\omega_i} u(\omega_i). \end{aligned}$$

A obtenção da utilidade esperada a partir da utilidade linear exige alguns axiomas técnicos adicionais e não será feita aqui por envolver elementos da teoria da integração, que não são um pre-requisito para estas notas.

(b) A aversão ao risco, a medida de Arrow-Pratt e seu significado.

Vamos continuar, aqui, a estudar o consumidor frente a uma situação de incerteza. Isto é, ele escolhe loterias e não pontos de seu espaço de bens básico. Como acabamos de ver, sob algumas hipóteses, podemos considerar o consumidor possuindo uma "utilidade esperada" no espaço de loterias, o que faremos a seguir. Vamos supor, também, que $\Omega = \mathbb{R}_+$, e $u\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $u \in C^2$, $u'(x) > 0$. Nestas notas vamos supor sempre que as variáveis aleatórias tem todos os momentos finitos. Como ilustração inicial consideraremos o paradoxo de São Petersburg. Suponha-se um jogo de cara ou coroa no qual a probabilidade de se obter cara seja $1/2$. A um jogador é oferecida a seguinte proposta. Joga-se a moeda até que se obtenha a primeira cara. Se n é o número de vezes que se necessitou jogar a moeda, então, paga-se ao jogador 2^n reais. Caso o jogador se importasse somente com a magnitude do valor esperado sua utilidade neste jogo seria infinita, uma vez que o valor esperado no jogo é: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2^n = \infty$. Portanto, neste caso, o jogador é indiferente entre este jogo e uma fortuna de infinitos reais.

Este fenômeno, que não parece natural, é conhecido com o nome de paradoxo de São Petersburgo. Várias proposta foram feitas para contornar este problema. Uma delas, devido a Bernoulli, sugere que um jogador típico tenha uma função de utilidade como, por exemplo, $u(x) = \log(x+1)$, $x \geq 0$, ou $u(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, neste caso, para saber a utilidade do jogo (ou loteria) não basta levar em consideração seu valor esperado. Se, por exemplo, $u(x) = \sqrt{x}$ então a utilidade do jogo acima é $u_{\succsim}(J) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} < \infty$. Portanto, neste caso, o jogador é indiferente entre este jogo e x reais, com x tal que $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$. Em geral, um jogador com este tipo de função de utilidade só está disposto a pagar uma quantia muito inferior ao valor esperado. Como veremos a seguir esta é uma propriedade de concavidade. Neste caso, o jogador é "avesso ao risco". Entre uma loteria e o valor esperado da loteria, o jogador fica com o valor esperado. Com efeito, suponha um jogador que tivesse, inicialmente, x reais e tivesse a proposta do seguinte jogo de valor esperado zero: $+n$ reais com probabilidade $\frac{1}{2}$ e $-n$ com probabilidade $\frac{1}{2}$. Então, ele não aceitaria a proposta caso tivesse uma função de utilidade estritamente côncava: $u(x) = u\left(\frac{1}{2}(x+h) + \frac{1}{2}(x-h)\right) > \frac{1}{2}u(x+h) + \frac{1}{2}u(x-h)$. Por outro lado, o jogo seria aceito se a função de utilidade fosse estritamente convexa, pois, neste caso: $u(x) < \frac{1}{2}u(x+h) + \frac{1}{2}u(x-h)$. No caso de utilidade linear o jogador seria indiferente entre aceitar a proposta ou não, pois o valor esperado do jogo é zero.

Graficamente vemos que o jogador rejeitaria o jogo se o arco ficasse por baixo da curva (u côncava) e aceitaria o jogo caso o arco ficasse por cima da curva (u convexo).

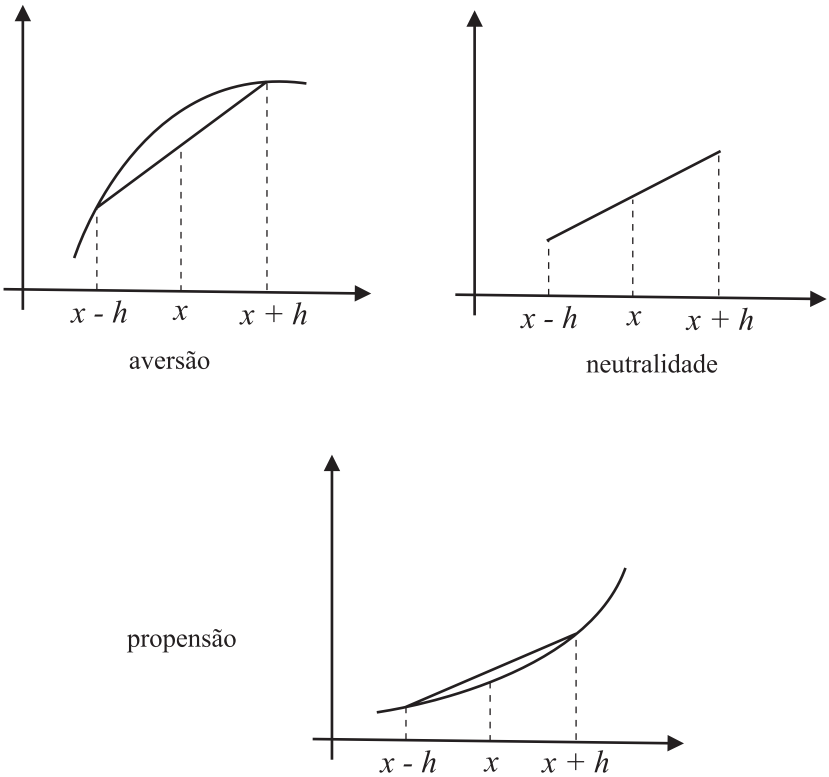


Figura 13

Para determinar o grau de aversão ao risco, Arrow e Pratt (1964) propuseram a seguinte medida:

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

Obviamente $r(x) > 0$ para u côncava, $r(x) = 0$ para u linear e $r(x) < 0$ para u convexa. Notamos também que r depende do nível de riqueza inicial do indivíduo, x.

A justificativa de r como medida de aversão ao risco pode ser feita pelo teorema a seguir. Dada variável aleatória Z que represente um jogo (ou uma loteria) e riqueza inicial x, o prêmio pelo risco de Z, $\pi(x, Z)$ é definido, implicitamente, por:

$$u(x + E(Z) - \pi(x, Z)) = Eu(x + Z).$$

Se $EZ = 0$, por exemplo, $\pi(x, Z)$ é o prêmio que o jogador tem que receber (ou pagar) para ficar com o mesmo nível de utilidade gerado pelo jogo representado por Z. Se u é côncava, então, $\pi(x, Z) \geq 0$ (i.e., o jogador paga) para todo nível de riqueza x e Z com $EZ = 0$.

Outro conceito importante neste contexto é o de prêmio probabilístico, definido de tal forma que o indivíduo fique indiferente entre o valor x com certeza e uma loteria que paga $x + h$ com probabilidade $Pr\{Z = h\}$ e $x - h$ com probabilidade $Pr\{Z = -h\} = 1 - Pr\{Z = h\}$. O prêmio probabilístico é definido sendo

$$p(x, h) = Pr\{Z = h\} - Pr\{Z = -h\} = 2Pr\{Z = h\} - 1,$$

de tal forma que

$$Eu(x + Z) = \frac{1}{2}[1 + p(x, h)]u(x + h) + \frac{1}{2}[1 - p(x, h)]u(x - h).$$

Como u é C^2, se expandirmos a relação acima em torno de x obteremos

$$u(x) = u(x) + hp(x, h)u'(x) + \frac{1}{2}h^2u''(x) + \theta(h^3).$$

Portanto

$$p(x, h) = \frac{1}{2}hr(x) + \theta(h^2).$$

Isto é, $r(x)$ é, aproximadamente, duas vezes o risco probabilístico requerido por unidade de risco.

Sejam r_i, π_i e p_i a medida de aversão ao risco, o prêmio de risco e o prêmio probabilístico correspondentes à u_i, $i = 1, 2$.

Podemos, agora, provar o principal resultado, justificando a media de aversão ao risco.

Teorema. *Seja I intervalo não degenerado de números reais. As relações abaixo são equivalentes, tanto com $>$ ou $\geq$.*

(i) *Para todo $x \in I$*

$$r_1(x) \geq (>) r_2(x).$$

(ii) *Para todo $x \in I$ e variável aleatória Z tal que $Z + x \in I$ com probabilidade um*

$$\pi_1(x, Z) \geq (>) \pi_2(x, Z),$$

onde para o caso $>$ é exigido também que Z não seja constante com probabilidade um.

(iii) *Para todo $x \in I$ e $h > 0$, tal que $x \pm h \in I$*

$$p_1(x, h) \geq (>) p_2(x, h).$$

Demonstração: Vamos demonstrar que, tanto com $\geq$ ou $>$, (i) $\Rightarrow$ (ii) e (i) $\Rightarrow$ (iii). A demonstração do teorema, então, estará completa, uma vez que caso (ii) seja verdadeiro com $>$ e (i) não se verifique com $>$ então (i) se verificaria com u_1 e u_2 com papéis trocados, e $\geq$ em vez de $>$. isto acarretaria (ii) com $\geq$ e u_1 e u_2 com papéis trocados em um subintervalo o que contradiz a hipótese de que (ii) é verdadeira. Da mesma forma demonstra-se que (ii) $\Rightarrow$ (i) com $\geq$ e, (iii) $\Rightarrow$ (i) com $>$ e $\geq$.

Demonstraremos, inicialmente, que (i) $\Rightarrow$ (ii). Faremos a demonstração somente com $>$ uma vez que o caso $\geq$ é semelhante. Suponhamos, portanto, (i) com $>$, vamos mostrar agora que $u_1 \cdot u_2^{-1}(t)$ é estritamente côncava se $t \in u_2(I)$. Para tal basta verificar que

$$\frac{d}{dt} u_1 \cdot u_2^{-1}(t) = \frac{u_1'(u_2^{-1}(t))}{u_2'(u_2^{-1}(t))}$$

é estritamente decrescente se $t \in u_2(I)$. Logo, basta mostrar que $\log\left(\frac{u_1'(x)}{u_2'(x)}\right)$ é estritamente decrescente se $x \in I$. O qual se segue de $\frac{d}{dx} \log \frac{u_1'(x)}{u_2'(x)} = r_2(x) - r_1(x) < 0$, válido para $x \in I$. Mostremos, agora, que (ii) é verdadeiro com $>$

$$\pi_i(x, Z) = x + E(Z - u_i^{-1} E(u_i(x + Z)).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\pi_1(x, Z) - \pi_2(x, Z) &= u_2^{-1}(E(u_2(x + z))) - u_1^{-1}(E(u_1(x + z)) \\
&= u_2^{-1}(Eu_2(x + z)) - u_1^{-1} Eu_1(u_2^{-1}(u_2(x + z))) \\
&< u_2^{-1} Eu_2(x + z) - u_1^{-1} u_1 u_2^{-1} Eu_2(x + z) = 0
\end{aligned}$$

onde a desigualdade estrita é dada pela concavidade de $u_1 \cdot u_2^{-1}$ e a desigualdade de Jansen[2]

$$Eu_1 u_2^{-1}(y) < u_1 u_2^{-1} E(y)$$

se y é variável aleatória com valores em $u_2(I)$ e não constante com probabilidade um.

[2] veja James (1981) pg. 141

Vamos demonstrar agora (i) $\Rightarrow$ (iii). Faremos a demonstração, somente, no caso $>$, por ser o caso $\geq$ análogo.

Suponha que (i) seja verdadeiro com $>$ e façamos a integração de ambos os membros da desigualdade de y a x, onde $x > y$, $x, y \in I$. Obtemos, então

$$-\log\left(\frac{u_1'(x)}{u_1'(y)}\right) > -\log\left(\frac{u_2'(x)}{u_2'(y)}\right)$$

o que é equivalente a

$$\frac{u_1'(x)}{u_1(y)} < \frac{u_2'(x)}{u_2(y)}, \quad x > y, \quad x, y \in I,$$

o que, pelo teorema do valor médio, acarreta

$$\frac{u_1(w) - u_1(x)}{u_1'(y)} < \frac{u_2(w) - u_2(x)}{u_2'(y)}, \quad y < x < w, \quad y, w \in I.$$

Usando, novamente, o teorema do valor médio na função

$$g(y) = \frac{u_1(y) - u_2(u)}{u_1(w) - u_1(x)} - \frac{u_2(y) - u_2(u)}{u_2(w) - u_2(x)}$$

obtemos:

$$\frac{u_1(w) - u_1(x)}{u_1(y) - u_1(v)} < \frac{u_2(w) - u_2(x)}{u_2(y) - u_2(v)}, \quad v < y \leq x < w, \quad u, w \in I.$$

Por conseguinte

$$\begin{aligned}\frac{1 - p_1(x,h)}{1 + p_1(x,h)} &= \frac{u_1(x+h) - u_1(x)}{u_1(x) - u_1(x-h)} < \frac{u_2(x+h) - u_2(x)}{u_2(x) - u_2(x-h)} \\ &= \frac{1 - p_2(x,h)}{1 + p_2(x,h)}\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração de (iii).

Exemplo. (Análise de média-variância).

Suponhamos um consumidor com uma função de utilidade quadrática $u(x) = \alpha x^2 + x$. Então, dado risco Z com $EZ = \mu$, Var $Z = \sigma^2$, tem-se $Eu(x+Z) = \alpha\sigma^2 + (2\alpha x + \mu\alpha + 1)\mu + x^2\alpha + x$. Logo, se $\alpha < 0$ i.e., o consumidor é avesso ao risco então sua utilidade esperada aumenta com o decréscimo de σ^2 i.e., com a diminuição da variância de Z e aumenta com o aumento de μ desde que $\frac{\partial Eu(x+Z)}{\partial \mu} > 0$ i.e., se $x < \frac{-1-\alpha\mu}{2\alpha}$.

Fazendo $Eu(x+Z) = 0$ podemos traçar as "curvas de indiferença" do consumidor que no caso de aversão ao risco $\alpha < 0$ tem a forma da esquerda na Figura 14 e no caso $\alpha > 0$, de propensão ao risco, a forma da direita.

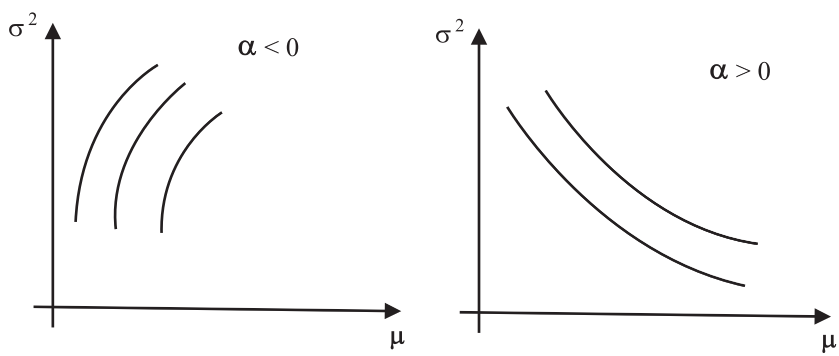


Figura 14

Se a distribuição da variável tem distribuição normal ou Gaussiana também é verdade que basta, como no caso quadrático, fazer uma análise do risco em termos de média e variância, veja exercício no final do capítulo. Por sua facilidade de tratamento analítico a análise de média-variância que foi desenvolvida por Markowitz e Tobin, ganhadores respectivamente, do prêmio Nobel de Economia de 1990 e 1981, tem tido seu uso generalizado na prática. Contudo, este procedimento pode levar a conclusões errôneas como o Exemplo 1 da seção seguinte demonstra.

(c) Riscos crescentes e suas diversas caracterizações.

No tópico recém estudado vimos que a medida de aversão ao risco nos dá uma forma de ver qual entre diversos consumidores está disposto a aceitar um determinado risco. Nesta seção vamos estudar qual entre diversos riscos é o mais fácil de ser aceito por um determinado consumidor. Isto é, enquanto o teorema acima ordenava os consumidores quanto a aceitação de riscos, o teorema a seguir vai introduzir uma relação de ordem entre os riscos. A referência para o que será exposto é o artigo de Rothschild e Stiglitz (1970). Mas o leitor é também aconselhado a consultar o artigo de Schmeidler (1979) que nos dá as referências dos trabalhos de matemáticos como Hardy, Littlewood e Polya e Blackwell que, de fato, precederam a Rothschild e Stiglitz no estudo destas questões.

Vejamos, agora, algumas ordens no espaço das variáveis aleatórias que expressem a noção de mais arriscado.

Definição. Sejam X e Y variáveis aleatórias com valores em $[0,1]$ com funções de distribuição F e G, respectivamente. Dizemos que

(a) $X \succcurlyeq_a Y$ se para toda $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ côncava

$$Eu(X) \leq Eu(Y),$$

i.e.,

$$\int_0^1 u(x)dF(x) \leq \int_0^1 u(x)dG(x),$$

(b) $X \succcurlyeq_b Y$ se

$$(\mathrm{b}_1) \qquad \int_0^1 S(x)dx = 0$$

e

$$(\mathrm{b}_2) \qquad \int_0^x S(y)dy \geq 0 \quad \text{para todo } x \geq 0,$$

onde $S(x) = F(x) - G(x)$;

(c) $X \succcurlyeq_c Y$ se existir variável aleatória Z tal que X tenha a mesma função de distribuição de $Y + Z$ e, $E(Z|Y) = 0$ com probabilidade um;

(d) $X \succcurlyeq_d Y$ se $\mathrm{Var}(X) \geq \mathrm{Var}(Y)$ e $EX = EY$.

A condição do item (a) nos diz que todo consumidor com uma função de utilidade côncava e, portanto, avesso ao risco tem maior utilidade com Y do que com X. Isto é, Y é preferida à X por todo consumidor avesso ao risco. Note-se que como $u(x) = x$ e $u(x) = -x$ são ambas côncavas se $X \succcurlyeq_a Y$ então $X = EY$. A condição de (b_1) nos diz que $EX = EY$ e a condição de (b_2) nos diz que X tem maior cauda que Y i.e., F atribui maior probabilidade a valores mais distantes da média que G.

A condição de (c) nos dia que X é igual, em distribuição, e Y somada a uma outra variável Z de valor esperado (condionado a Y) zero. Isto é, X possui maior variabilidade que Y. Finalmente, as condições de (d) nos dizem, simplesmente, que além de $EX = EY$, que é condição necessária para a comparabilidade entre X e Y como riscos ao consumidor, que a variância de X é maior que a variância de Y.

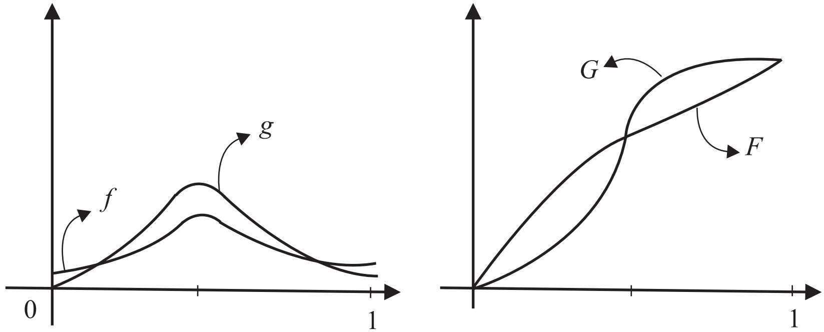


Figura 15

As definições (a), (b) e (c) são equivalentes como o teorema abaixo vai mostrar (parcialmente).

Obviamente, se $X \succcurlyeq_a Y$ então como $u(x) = -x^2$ é côncava segue-se que $X \succcurlyeq_d Y$. Contudo, como um exercício do fim do capítulo mostra $X \succcurlyeq_d Y \not\Rightarrow X \succcurlyeq_a Y$.

Teorema. Sejam X e Y variáveis aleatórias com valores em $[0, 1]$. As proposições abaixo são equivalentes:

(a) $X \succcurlyeq_a Y$

(b) $X \succcurlyeq_b Y$

(c) $X \succcurlyeq_c Y$

Demonstração (Parcial). Vamos demonstrar, somente, que (a) $\Leftrightarrow$ (b) e (c) $\Rightarrow$ (a). O leitor pode encontrar em Rothschild e Stiglitz a demonstração de que (a) $\Rightarrow$ (c).

Demonstração de (a) $\Rightarrow$ (b).

Por hipótese temos que para toda u côncava $\int_0^1 u(x)dS(x) \leq 0$. Como $u(x) = x$ e $u(x) = -x$ são côncavas segue-se que

$$\begin{aligned}\int_0^1 xdS(x) &= 1S(1) - \int_0^1 S(x)dx \\ &= -\int_0^1 S(x)dx \leq 0\end{aligned}$$

e, da mesma forma $\int_0^1 S(x)dx \leq 0$. Logo, $\int_0^1 S(x)dx = 0$ que é (b_1). Seja

$$u(x) = \begin{cases} x - \overline{x} & 0 \leq x \leq \overline{x}, \\ 0 & x > \overline{x}; \end{cases}$$

que é côncava. Então,

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad 0 \geq \int_0^1 u(x)dS(x) = \int_0^{\overline{x}} xdS(x) - \overline{x}\int_0^{\overline{x}} dS(x) \\
&(2) \qquad\qquad = \overline{x}S(\overline{x}) - \int_0^{\overline{x}} S(x)dx - \overline{x}\int_0^{\overline{x}} dS(x) \\
&(3) \qquad\qquad = -\int_0^{\overline{x}} S(x)dx,
\end{aligned}$$

o que demonstra (b_2).

Demonstração de que (b) $\Rightarrow$ (a).

Vamos demonstrar que para toda u côncava, C^2, $\int_0^1 u(x)dS(x) \leq 0$. O resultado segue-se, então, uma vez que funções côncavas em $[0,1]$ podem ser aproximadas, uniformemente, por funções C^2, côncavas

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 u(x)dS(x) &= u(1)S(1) - \int_0^1 u'(x)S(x)dx \\
&= -u'(1)\int_0^1 S(x)dx + \int_0^1 u''(x)\left(\int_0^x S(y)dy\right)dx \\
&= \int_0^1 u''(x)\left(\int_0^x S(y)dy\right)dx \leq 0
\end{aligned}
$$

uma vez que $u''(x) \leq 0$ e $\int_0^x S(y)dy \geq 0$.

Demonstração de que (c) $\Rightarrow$ (a).

Seja u côncava. Então $Eu(x) = Eu(Y+Z) = EE_Y u(Y+Z)$ onde E_Y é o valor esperado condicionado a Y, (veja James (1981)). Logo, pela desigualdade de Jensen (veja James (1981)), a expressão acima é menor ou igual a

$$Eu(E_Y(Y+Z)) = Eu(Y).$$

Exemplo. (Rothschild e Stiglitz). Suponha um consumidor com riqueza x e que queira maximizar sua utilidade que depende de consumo hoje, c_1 e do consumo amanhã, c_2. O que ele não consome hoje ele investe com uma taxa de retorno R, aleatória, por unidade investida. Suponha-se que o consumidor seja avesso ao risco.

Assim, seu problema é maximizar $U(c_1)+Eu(c_2) = u((1-s)x)+Eu(sRx)$ onde s é a porcentagem da riqueza inicial poupada. O valor de s que maximiza o problema acima é dado, implicitamente, pela equação

$$(*) \qquad u'((1-s)x) = Eu'(sRx))R.$$

Se a análise da média variância fosse verdadeira então um aumento do risco acarretaria uma diminuição de s. Tal é o caso se $u(x) = \alpha^2 x + x$ ($\alpha < 0$), como o leitor pode verificar. Contudo, se $u_\beta(x) = (1-\beta)x^{1-\beta}$ ($\beta > 0$, $\beta \neq 1$), por exemplo, então um aumento de risco aumenta s se e só se $\beta > 1$. Pois, se $R' \succcurlyeq_a R$, então para toda função côncava φ, $E\varphi(R) \geq E\varphi(R')$. Portanto, se $\varphi(R) = Ru'(sxR)$ for côncava em R o lado direito de (*) acima diminui com um aumento de R e para que a igualdade de (*) continue se verificando temos que ter um aumento do argumento de u' i.e., uma diminuição de s. Portanto, para demonstrar a associação acerca de u_β acima basta verificar que $Ru'_\beta(sxR)$ é côncava em R se e só se $\beta < 1$.

Exercícios

1. Seja $\Omega = \{0, 1\}$, se $x = \lambda\delta_{\{1\}} + (1-\lambda)\delta_{\{0\}}$ com $0 \leq \lambda \leq 1$ defina $u(x) = \lambda^2$. É u uma utilidade esperada? A preferência $\succcurlyeq$ induzida por u em $X = \{x : x = \lambda\delta_{\{1\}} + (1-\lambda)\delta_{\{0\}}, 0 \leq \lambda \leq 1\}$ satisfaz (A-1) e (A-2)? Qual é a utilidade esperada associada a $\succcurlyeq$?

2. Seja Ω e X como no Exercício 1. Seja $u(x) = (\lambda - 1/2)^2$ existe utilidade esperada para u?

   Sugestão: (A-2) é condição necessária para a existência da utilidade esperada.

3. Considere um consumidor com função de utilidade $u(x) = \log(1 - e^{-x})$ $x > 0$ e riqueza inicial 100 que tenha que escolher entre um investimento com retorno dado pela densidade $f(x) = 12(x - 1/2)^2$, $0 \leq x \leq 1$ e outro com densidade $g(x) = 80(x - 1/2)^4$, $0 \leq x \leq 1$. Qual a sua melhor escolha?

4. Qual das duas funções de utilidade: $u_1(x) = 10x^{1-1/10} + 10$, $u_2(x) = 10 \log x + 10$ exige maior prêmio de risco, $\pi(x, Z)$, se a riqueza inicial é 10 e o risco a ser considerado é dado por uma variável aleatória com distribuição uniforme em $[0, 1]$.

5. Demonstre que se um consumidor tem aversão ao risco constante, $r(x) = c$, então sua função de utilidade tem uma das seguintes formas: $u(x) = x$ se $c = 0$, $u(x) = -e^{-cx}$ se $c > 0$, ou $u(x) = e^{-cx}$ se $c < 0$.

6. Outra medida de aversão ao risco, denominada de aversão relativa ao risco é definida por

$$r_r(x) = -x\frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

   Mostre que se $r_r = c$ então $u(x) = x^{1-c}$ se $r_r(x) = c < 1$, $u(x) = \log x$ se $r_r(x) = 1$, $u(x) = -x^{-(c-1)}$ se $r_r(x) = c > 1$.

7. Demonstre que se o risco Z é uma variável aleatória normal com média μ e variância σ^2 e o consumidor tiver uma utilidade esperada, $u_{\succcurlyeq} = E_Z u$, com u côncava então valem as conclusões da análise média variância. Isto é, $u_{\succcurlyeq}(\mu, \sigma)$ é estritamente crescente em μ e estritamente decrescente em σ.

8. Dê exemplo de variáveis aleatórias X e Y com $X \succcurlyeq_d Y$ mas tais que $X \succcurlyeq_a Y$ não seja verdadeira.

9. Demonstre as afirmações finais do Exemplo da Seção **(c)** acima.

PARTE II

O COMPORTAMENTO COLETIVO DAS UNIDADES ECONÔMICAS

II – O COMPORTAMENTO COLETIVO DAS UNIDADES ECONÔMICAS

Nesta segunda parte vamos estudar diversos modelos que explicam como os indivíduos de uma economia interagem no processo de troca econômica, visando sua melhoria individual. Assim, vamos continuar com a hipótese de que os agentes agem de forma a maximizar seu bem estar individual. Portanto, os conceitos e resultados obtidos na primeira parte serão utilizados aqui. Formalmente, podemos descrever uma economia com ℓ bens, sem produção, por n indivíduos com dotações iniciais $w_i \in \mathbb{R}^{\ell}_{++}$ e preferências contínuas $\succcurlyeq_i \subset \mathbb{R}^{\ell}_{+} \times \mathbb{R}^{\ell}_{+}$, $i = 1, \ldots, n$. Se $\mathcal{P}$ é o conjunto das preferências contínuas em $\mathbb{R}^{\ell}_{+}$, então, uma economia é, simplesmente, um elemento $\varepsilon = \{(w_i, \succcurlyeq_i) : i = 1, \ldots, n\} \in \mathbb{R}^{\ell n}_{++} \times \mathcal{P}^n$. Estamos interessados em examinar os diversos pontos factíveis de ε; isto é, nas realocações das dotações iniciais:

$$FA := \left\{ x \in \mathbb{R}^{\ell n}_{+} : \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} w_i \right\}.$$

Isto porque, a partir de suas dotações iniciais, w_i's, os consumidores podem tentar melhorar através de processos de troca, ou de forma mais geral, através de processos alocativos, $A\colon \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}^{\ell}_{+}$ que obedeçam às restrições físicas da economia, impostas pelas dotações iniciais dos consumidores, i.e. $(A(1), \ldots, A(n)) \in FA$.

Na Seção 1 estudamos a possibilidade de se obter, de forma sistemática, uma preferência social, a partir das preferências individuais, o que daria, em particular, um processo alocativo. Nesta seção, na verdade, as preferências individuais bem como as preferências sociais são supostas em um espaço abstrato X com um número de elementos distintos maior ou igual a três. Assim, queremos uma função $\phi\colon \mathcal{P}^n \to P$. O teorema de impossibilidade de Arrow nos diz que se exigiros certas propriedades deste processo agregativo de preferências (unanimidade e independência das alternativas irrelevantes) então a única ϕ que é possível é ditatorial i.e., a preferência social que prevalece é sempre a preferência de um único indivíduo, o ditador da sociedade.

Na Seção 2 estudamos processos alocativos obtidos por economias descentralizadas. Nestas economias temos um leiloeiro que dita preços e a partir destes preços os agentes econômicos compram e vendem mercadorias baseados no critério de otimalidade individual, sem se preocupar com a compatibilidade agregada. O teorema de existência de equilíbrio provado nesta seção garante que existem preços aos quais a escolha dos indivíduos (i.e., sua função de demanda) são elementos de FA. Este equilíbrio é também chamado de Walrasiano ou de Arrow-Debreu.

Na Seção 3 apresentamos o critério de otimalidade de Pareto, que os processos alocativos devem apresentar. Para que $x \in FA$ satisfaça este critério é exigido que não exista nenhum outro $y \in FA$ que melhore todos os participantes da economia. Mostramos em seguida que todo equilíbrio Walrasiano é ótimo de Pareto. Reciprocamente, mostramos que todo ótimo de Pareto é um equilíbrio Walrasiano para alguma distribuição de dotações iniciais.

A Seção 4 estuda os processos alocativos provenientes de jogos cooperativos. O "core" ou núcleo da economia, é o conjunto dos pontos de FA que não podem ser melhorados por qualquer subgrupo de indivíduos que desejem trocar apenas entre si. Mostramos que este conceito, alocativo embora distinto da alocação Walrasiana, está intimamente com ela relacionado. Todo equilíbrio Walrasiano está no núcleo e toda alocação que não seja equilíbrio

Walrasiano não está no núcleo de uma economia com um número suficientemente grande de participantes.

Na Seção 5 estudamos alguns conceitos de jogos não cooperativos. Isto é, os jogos nos quais os jogadores agem de forma independente, sem se preocupar em formar coalizões para obtenção de vantagens mútuas. Iniciamos a seção com o estudo dos jogos de soma zero inicialmente estudados por Borel e depois, com mais profundidade, por von-Neumann e Morgenstern. Nestes jogos como o nome indica supomos a existência de uma certa quantia fixa (zero por simplicidade) de um único bem, por exemplo, reais, a ser repartida entre os jogadores. O tipo de situação que acabamos de descrever tem seu interesse do ponto de vista econômico diminuido uma vez que exclui a possibilidade de ganhos mútuos por troca, e esta última é, sem dúvida, a situação mais importante do ponto de vista econômico. Outro conceito de equilíbrio estudado na seção é o devido a Cournot-Nash. Uma alocação x é dita de Cournot-Nash se cada jogador i está maximizando o seu retorno, em x_i, quando as escolhas dos demais está fixa em x_j, $j \neq i$, e a de i é permitida variar. Este conceito de equilíbrio é importante para a descrição de um mercado onde existem firmas que não são passivas com respeito aos preços. Esta situação é chamada de concorrência monopolista e é observada na realidade econômica nos mercados onde existem um número pequeno de firmas como por exemplo no mercado de automóveis ou de passagens aéreas. A Seção 5 finaliza com um breve estudo dos jogos com pagamentos laterais onde é apresentado o conceito de equilíbrio denominado por valor de Shapley.

1. A IMPOSSIBILIDADE DA RACIONALIDADE SOCIAL: OS DITADORES DE ARROW

Em um trabalho que foi em grande parte responsável pelo Prêmio Nobel que recebeu, K. Arrow (1963) propôs e resolveu o seguinte problema. Seja X um conjunto com três ou mais elementos distintos. Seja $\mathcal{P}$ o conjunto das preferências $\succcurlyeq\, \subset X \times X$. Como dissemos acima o conjunto de consumo considerado nesta seção é um conjunto abstrato. Com esta formulação podemos considerar além da situação usual, $X = FA$, outras como, por exemplo, $X =$ condidatos em uma dada eleição, $X =$ alunos de uma escola, etc...

Suponhamos que dadas n preferências em $\mathcal{P}$ queiramos obter uma outra $\succcurlyeq$ também em $\mathcal{P}$ que represente o gosto ou a forma de decidir da coletividade. Por exemplo, se $X = FA$, e cada indivíduo tenha uma forma de escolher entre os elementos de FA, $\succcurlyeq_i$, a sociedade deve também encontrar um modo de decidir entre as possibilidades factíveis, baseados nos gostos individuais, ou, se cada cidadão sabe escolher qual entre dois candidatos de um dado conjunto, X, prefere; a sociedade deve saber uma forma de fazer uma eleição. Isto é, estamos interessados em encontrar uma função

$$\phi\colon \mathcal{P}^n \longrightarrow \mathcal{P}$$

$$\phi(\succcurlyeq_1, \ldots, \succcurlyeq_n) = \succcurlyeq_c.$$

Talvez seja razoável, também, exigir algumas propriedades de ϕ.

(A-1) Axioma da unanimidade:

Se para todo i $x \succcurlyeq_i y$ então $x \succcurlyeq_c y$.

(A-2) Axioma da independência:

Sejam $(\succcurlyeq_i)_{i=1}^n$ e $(\succcurlyeq_i')_{i=1}^n$, preferências em $\mathcal{P}$. Sejam $\succcurlyeq_c = \phi(\succcurlyeq_1, \ldots, \succcurlyeq_n)$, $\succcurlyeq_c' = \phi(\succcurlyeq_1', \ldots, \succcurlyeq_n')$. Então

$$\{\forall\ i, x \succcurlyeq_i y \Leftrightarrow x \succcurlyeq_i' y\} \Rightarrow \{x \succcurlyeq_c y \Leftrightarrow x \succcurlyeq_c' y\}.$$

Necessitamos também da seguinte:

Definição. Dizemos que ϕ é ditatorial se existir $1 \leq i \leq n$ tal que para todo x e y em X, se $x \succcurlyeq_i y$ então $x\phi(\succ_1, \ldots, \succ_n)y$. Isto é, ϕ é ditatorial se existir um indivíduo que sempre faça prevalecer a sua preferência.

Podemos, agora, enunciar o resultado de Arrow:

Teorema. Se ϕ satisfaz (A-1) e (A-2) então ϕ é ditatorial.

Antes de demonstrar o teorema convém fazer alguns comentários sobre os axiomas acima. Em primeiro lugar, vale ressaltar que embora de forma não tão explícita, a hipótese de que a sociedade faz suas escolhas a partir de uma preferência e, portanto, de forma completa, reflexiva e transitiva. Esta hipótese foi feita ao assumirmos que o contradomínio de ϕ é $\mathcal{P}$. A reflexividade e o fato de ser completa podem não apresentar maiores problemas. Contudo, o seguinte paradoxo, observado pela primeira vez por Condorcet, mostra que a transitividade já exclui muitas das regras de decisão social comumente utilizadas, como é o caso do voto majoritário.

Exemplo. Suponha que existam três candidatos a um determinado posto: x, y e z. suponha que existam três eleitores com as seguintes preferências:

Eleitor 1: $x \succ_1 y \succ_1 z$

Eleitor 2: $y \succ_2 z \succ_2 x$

Eleitor 3: $z \succ_3 x \succ_3 y$

Então com a regra majoritária, isto é,

$$\phi(\succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2, \succcurlyeq_3) = \succcurlyeq_c \quad \text{é}$$

tal que

$$a \succcurlyeq_c b \Leftrightarrow \#\{i,\ a \succcurlyeq_i b\} \geq 2.$$

Temos

$$x \succcurlyeq_c y, \quad y \succcurlyeq_c z$$

e, no entanto, $z \succcurlyeq_c x$; o que nos mostra a não transitividade de $\succcurlyeq_c$.

Este exemplo, obviamente, exige que X tenha pelo menos 3 elementos, o que sem dúvida é um argumento a favor do bipartidarismo. Uma das formas em que a defesa da hipótese de transitividade da preferência social pode ser feita é com base na idéia de que a sociedade tem que fazer escolhas sequenciais e que, portanto, deve se utilizar de procedimentos que evitem o arrependimento.

Passemos, agora, ao comentário do Axioma da Independência também chamado de independência das alternativas irrelevantes. Este axioma foi, sem dúvida, um dos mais criticados entre os requeridos pelo teorema da impossibilidade. Ele exige, essencialmente, que para escolher entre duas alternativas x e y a presença ou não de z como alternativa é irrelevante. O exemplo a seguir ajudará à compreensão deste axioma.

Exemplo. Suponhamos, novamente, três candidatos $X = \{x, y, z\}$ e, desta vez, nove eleitores com as seguintes preferências:

$$\begin{array}{lll} x \succ_1 y \succ_1 z & x \succ_4 z \succ_4 y & z \succ_7 x \succ_7 y \\ x \succ_2 y \succ_2 z & y \succ_5 z \succ_5 x & z \succ_8 x \succ_8 y \\ x \succ_3 y \succ_3 z & y \succ_6 z \succ_6 x & z \succ_9 y \succ_9 x \end{array}$$

Supondo que a regra de escolha social seja dada por:

$$\begin{aligned} x \succcurlyeq_c y \Leftrightarrow S_x &= \#\{i,\ x \succcurlyeq_i y, \quad x \succcurlyeq_i z\} \\ &> S_y = \#\{i, y \succcurlyeq_i x, \quad y \succcurlyeq_i z\} \end{aligned}$$

isto é, para cada candidato contamos o número de eleitores, S_x, que o preferem aos demais e então, entre dois candidatos escolhemos o de maior contagem.

Segue-se que:

$$S_x = 4, \quad S_y = 2, \quad S_z = 3,$$

logo, $x \succ_c z \succ_c y$.

Suponhamos que, sabendo que vai ser derrotado, y abandone a disputa, isto é, renuncie. Então, as preferências individuais passam a ser:

$$\begin{array}{lll} x \succ'_1 z \succ'_1 y & x \succ'_4 z \succ'_4 y & z \succ'_6 x \succ'_6 y \\ x \succ'_2 z \succ'_2 y & z \succ'_5 z \succ'_5 y & z \succ'_7 x \succ'_7 y \\ x \succ'_3 z \succ'_3 y & z \succ'_5 x \succ'_5 y & z \succ'_8 x \succ'_8 y \end{array}$$

Portanto,

$$S'_x = 4, \quad S'_y = 0, \quad S'_z = 5,$$

e, por conseguinte:

$$z \succ'_c x \succ'_c y.$$

Isto é, ao se retirar y permitiu a vitória de z sobre x, o que antes não ocorria.

O leitor poderá verificar que, formalmente, o axioma da independência falha, pois, $\forall\, i$, $x \succcurlyeq_i z \Leftrightarrow x \succcurlyeq'_i z$ e, no entanto, $x \succcurlyeq_c z$. Mas, $x \succcurlyeq'_c z$ é falso.

Vamos, agora, demonstrar o teorema da impossibilidade.

Demonstração: Chamamos de coalizão a qualquer subconjunto S de $\{1, \ldots, n\}$. Dados x e y em X, a coalizão S é dita determinante de x contra y e denotada $Sd(x, y)$, se

$$\left.\begin{array}{ll} x \succcurlyeq_i y & \forall\, i \in S \\ y \succcurlyeq_i x & i \notin S \end{array}\right\} \Rightarrow x\phi(\succcurlyeq_1, \ldots, \succcurlyeq_n)y.$$

S é dita determinante se $Sd(x, y)$ para todo x e y em X. Vamos demonstrar o teorema através de várias afirmações.

Afirmação 1. Se $\{i\}$ é determinante então i é ditador.

Necessitamos mostrar que $\{i\}$ sempre faz prevalecer a sua opinião. Mas, se $\{i\}$ é determinante então, por definição, i faz prevalecer sua opinião sempre que os outros estão contra. Suponhamos que $x, y, z \in X$ e $\succcurlyeq_i$ são preferências tais que

$$x \succcurlyeq_i z \succcurlyeq_i y$$

$$z \succcurlyeq_j x \quad \text{e} \quad z \succcurlyeq_j y \quad j \neq i.$$

Como $\{i\}$ $d(x, z)$ temos que $x\phi(\succcurlyeq_1, \ldots, \succcurlyeq_n)y$ e, por (A-1) $z\phi(\succcurlyeq_1, \ldots, \succcurlyeq_n)y$. Por transitividade, $x\phi(\succ_1, \ldots, \succ_n)y$. Logo, pelo axioma da independência, sempre que $\succcurlyeq'_i$'s forem tais que $x \succcurlyeq'_i y$ então $x\phi(\succcurlyeq'_1, \ldots, \succcurlyeq'_n)y$, o que demonstra que i é ditador.

Afirmação 2. Existem $x, y \in X$ e $1 \leq i \leq n$ tais que $\{i\}d(x, y)$.

Seja $\mathcal{D} = \{S \subset \{1, \ldots, n\} \mid \exists\, x, y \in X,\ Sd(x, y)\}$. Por (A-1), $\{1, \ldots, n\} \in \mathcal{D}$. Sendo $\mathcal{D}$ não vazia existe $\overline{S} \in \mathcal{D}$ tal que $\#\overline{S} \leq \#S$, $\forall\, S \in \mathcal{D}$. Por (A-1), $\phi \in \mathcal{D}$. Logo, $\#\overline{S} \geq 1$. Suponhamos que $\#\overline{S} \geq 2$. Considere $\overline{\overline{S}}$ tal que $\overline{S} = \overline{\overline{S}} \cup \{i\}$ com $i \notin \overline{\overline{S}}$. Seja $z \neq x, y$ (aqui estamos usando o fato de $\#X \geq 3$). Consideremos preferências com as seguintes características:

$$\begin{aligned} x \succcurlyeq_i y \succcurlyeq_i z & \\ z \succcurlyeq_j x \succcurlyeq_j y &\quad j \in \overline{\overline{S}} \\ y \succcurlyeq_k z \succcurlyeq_k x &\quad k \notin \overline{S} \end{aligned}$$

como $\overline{S}d(x, y)$ temos $x \succcurlyeq_c y$. Se tivessemos, também, $z \succcurlyeq_c y$, teríamos por (A-2) que $\overline{\overline{S}}d(z, y)$, o que é um absurdo, pela escolha de $\overline{S}$, pois $\#\overline{\overline{S}} < \#\overline{S}$. E, neste caso, $\overline{\overline{S}} \in \mathcal{D}$. Como $\succcurlyeq_c$ é completa temos que $y \succcurlyeq_c z$, e por transitividade, $x \succcurlyeq_c z$. Mas daí, por (A-2) temos que $\{i\}d(x, z)$. Portanto, $\{i\} \in \mathcal{D}$. Isto é um absurdo uma vez que $\#\overline{S} \geq 2$, e $\overline{S}$ foi escolhido como a coalizão de $\mathcal{D}$ com a menor cardinalidade. Acabamos de ver, portanto, que a hipótese $\#\overline{S} \geq 2$ nos levou a um absurdo estando, por conseginte, demonstrada a afirmação.

Para finalizar a demonstração do teorema basta demonstrar a seguinte

Afirmação 3. $\{i\}$ é determinante.

Demonstração: Temos que $\{i\}d(x, y)$. Seja $z \neq x, y$. Supondo preferências tais que

$$\begin{aligned} x \succcurlyeq_i y \succcurlyeq_i z & \\ y \succcurlyeq_j z \succcurlyeq_j x &\quad j \neq i. \end{aligned}$$

Então, por (A-1), $y \succcurlyeq_c z$ e por $\{i\}d(x,y)$, $x \succcurlyeq_c y$. Logo, por transitividade, $x \succcurlyeq_c z$. Por (A-2), temos que $\{i\}d(x,z)$. Seja, agora, $w \neq x, z$. Considerando as preferências:

$$w \succcurlyeq_i x \succcurlyeq_i z$$
$$z \succcurlyeq_j z \succcurlyeq_j x \quad j \neq i.$$

Por raciocínio análogo ao acima, $w \succ_c z$ e, portanto, $\{i\}d(w,z)$. Como w e z são arbitrários, a prova esta encerrada.

Para finalizar esta seção, gostaríamos de mencionar um resultado devido a Brack. Suponhamos que os eleitores tenham um gosto político no espectro liberal-conservador, representado pelo intervalo $[0,1]$. Suponha que a preferência de cada um dos n eleitores (n ímpar) seja dada por uma função f_i, $1 \leq i \leq n$. Isto é, $x \succ_i y \Leftrightarrow f_i(x) \geq f_i(y)$. Suponha que f_i tenha um único máximo, x_i, seja crescente em $0 \leq x \leq x_i$, decrescente em $x_i \leq x \leq 1$ e, simétrica em torno de x_i (i.e., $f(x_i + a) = f(x_i - a)$ se $x_i - a \geq 0$, $x_i + a \leq 1$, $a \geq 0$).

Então, podemos provar que o voto majoritário, que somente satisfaz a (A-1) e (A-2), é também transitivo. Como o voto majoritário é, obviamente, não ditarorial podemos ver o quão restritiva é a limitação da condição nas preferências do tipo descrito acima e conhecida por "single peakdness".

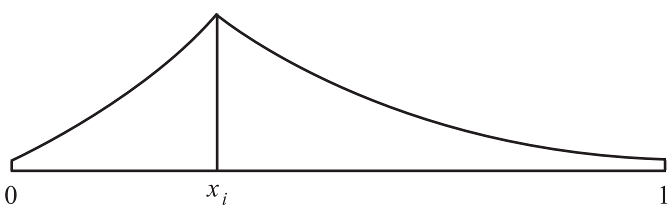


Figura 16

Exercícios

1. Considere o seguinte critério para avaliação de alunos. Existem 3 matérias: Português, Matemática e Física. Em cada matéria é feita uma ordenação dos alunos, segundo uma preferência. Então, somam-se os pontos de cada aluno dados por esta ordenação para a obtenção de uma classificação geral. Este critério satisfaz a (A-1)? a (A-2)? É transitivo?

2. Podemos pensar o critério de avaliação das escolas de samba como uma ϕ deste capítulo?

3. Por resultados do Capítulo 1 da primeira parte destas notas sabemos que a cada preferência podemos associar várias utilidades (assuma X topológico e considere somente preferências contínuas). Suponhamos que a cada preferência $\succcurlyeq$, associamos uma destas utilidades $u_{\succcurlyeq}$. Seja, agora,

$$\phi\colon \mathcal{P}^n \longrightarrow \mathcal{P}$$

$$\phi(\succcurlyeq_1, \ldots, \succcurlyeq_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_{\succcurlyeq_i}, \quad \alpha_i > 0 \ \forall\, i.$$

   Está ϕ bem definida? ϕ satisfaz a (A-1)? a (A-2)? A função ϕ é ditatorial?

4. Como vimos pelo resultado de Black uma das formas de se conseguir ϕ não ditatorial e satisfazendo a (A-1) e (A-2) é restringindo seu domínio a um subconjunto de $\mathcal{P}$. Dê exemplos.

2. O EQUILÍBRIO GERAL WALRASIANO: EXISTÊNCIA

(a) Introdução

O sistema Walrasiano ou de Arrow-Debreu, que passamos a descrever é, sem dúvida, a mais completa e elegante formalização da realidade econômica até agora obtida. Como o nome indica, este sistema foi, inicialmente, desenvolvido por Leon Walras no fim do século passado. Contudo, a descrição de Walras foi bastante incompleta do ponto de vista matemático. Foi, somente, em 1954 que Arrow e Debreu deram uma formulação geral e rigorosa às economias Walrasianas. E, o que é mais importante, provaram um teorema de existência de equilíbrio para estas economias. Para tal, Arrow e Debreu necessitaram do teorema do ponto fixo de Kakutani. Como este teorema e mesmo o do ponto fixo de Brouwer só foram obtidos muito após Walras podemos entender as limitações das exposições iniciais do equilíbrio geral. Posteriormente, Debreu (1959) clarificou e generalizou ainda mais estes resultados. Uma ótima exposição desta teoria, inclusive com um breve histórico, é dada em Arrow-Hahn (1971).

A versão que vamos apresentar aqui é bem menos geral que a de Debreu (1959) ou Arrow-Hahn (1971). Seja uma economia com n consumidores e m firmas, $\varepsilon = \{w_i, \succsim_i, Y_j, \theta_{ij} : \ i = 1, \ldots, n; \ j = 1, \ldots, m\}$ onde w_i e $\succsim_i$ são, respectivamente, as dotações iniciais e as preferências do consumidor i; Y_j é o conjunto de possibilidades de produção da firma j e θ_{ij} é a participação acionária do consumidor i na firma j, obviamente, $\theta_{ij} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \theta_{ij} \equiv 1$. O conceito de equilíbrio é dado pela

Definição. $(x,y,p) \in \mathbb{R}_+^{\ell n} \times \mathbb{R}^{\ell m} \times S_+^{\ell-1}$ é dito equilíbrio Walrasiano (E.W.) para ε se:

(i) x_i é demandado pelo consumidor i aos preços p i.e.: $px_i \leq pw_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} p y_j$ e, para todo $x \in \mathbb{R}_+^{\ell}$ tal que $px' \leq pw_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} p y_j$ temos $x_i \succsim_i x'$;

(ii) y_j maximiza o lucro da firma j, i.e., $y_j \in Y_j$, e $py_j \geq py'$ para todo y' em Y_j;

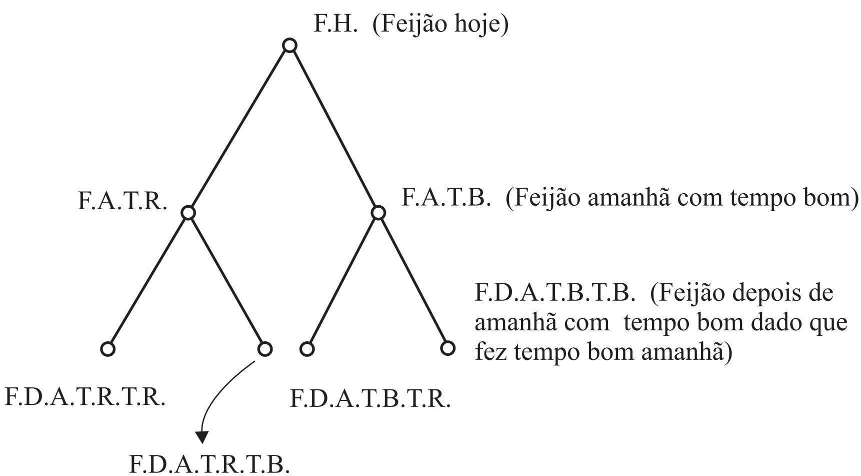
(iii) Os mercados estão em equilíbrio, i.e., a demanda é igual à oferta em todos os mercados:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{m} y_j + \sum_{i=1}^{n} w_i.$$

Se $p \in S_+^{\ell-1}$ é tal que existe $(x,y) \in \mathbb{R}_+^{\ell n} \times \mathbb{R}^{\ell m}$ com (x,y,p) E.W. chamamos, também, p de E.W. . Assim como (x,y) tal que existe $p \in X^{\ell-1}$ com (x,y,p) E.W. . O preço Walrasiano é, portanto, aquele que faz com que a oferta seja igual à demanda mesmo com os agentes econômicos agindo de forma descentralizada e visando o interesse próprio. Isto é, mesmo com cada consumidor levando ao mercado a demanda que maximiza sua preferência individual, sujeito à sua restrição orçamentária, e com cada firma comprando os insumos e vendendo os produtos que maximizem, sujeito à sua possibilidade de produção, seu lucro.

Entre os processos alocativos até aqui estudados pelos economistas o E.W. é sem dúvida o mais atraente. Isto se deve a certas características como a descentralização e a utilização de um mecanismo simples, como o sistema de preços para a obtenção desta descentralização. Outra propriedade relevante deste sistema é que características importantes como a incerteza e a dependência temporal do fato econômico podem ser incorporados à formulação Walrasiana, através de bens contingentes aos estados da natureza e bens datados respectivamente. Tal procedimento é estudado no exemplo seguinte.

Exemplo. A Economia possui dois bens básicos: feijão e cimento; existem três períodos: hoje, amanhã e o depois de amanhã; e dois possíveis estados da natureza: tempo bom e tempo ruim. Podemos representar os tipos de feijão na economia pela "árvore" abaixo.



Temos sete tipos de feijão e três de cimento, que não dependem do tempo, e portanto, um total de dez bens na economia. As preferências individuais numa economia com incerteza pode ser do tipo de von-Neumann Morgenstern, com cada consumidor atribuindo uma certa probabilidade subjetiva a cada estado da natureza. Cabe ressaltar neste ponto que a hipótese de convexidade das preferências, essencial para a existência de equilíbrio Walrasiano, está relacionada com a aversão ao risco como vimos (para o caso $\ell = 1$) no capítulo sobre incerteza. Uma firma desta economia pode ser do tipo:

$$\begin{aligned} Y(TBTB) = \{(FH, FATB, FDATBTB) \in R^c_{++} \times R \times R_+, \\ -100 \leq FH \leq 0, \quad FATB_1 = -10FH, \\ FDATBTB = -10FATB_2, \quad -100 \leq FATB_2 \leq 0, \\ FATB_1 + FATB_2 = FATB\}. \end{aligned}$$

Similarmente, teríamos um conjunto de possibilidades de produção para cada uma das outras linhas de eventos $TBTR$, $TRTB$, $TRTR$, com as devidas mudanças. Assim, poderíamos ter $FATR = -FH$. Isto é, caso houvesse tempo ruim o produtor obteria apenas as sementes utilizadas no período anterior. O conjunto de possibilidades de produção da firma seria, então, $Y = \prod_{i=1}^{n} Y(e_i)$, onde os e_i denotam as diversas linhas de eventos. O problema da firma seria, como sempre, o de maximização de lucros. Suponha que a economia tivesse um mercado para cada um destes bens, contingentes à realização do respectivo evento, com todos os mercados ativos hoje. Isto é, o leiloeiro procuraria igualar, hoje, a oferta e a demanda de todos os bens da economia, presentes, futuros e condicionais aos eventos. O bom senso, obviamente, exige que os produtores que se obrigassem a entregar feijão com tempo ruim amanhã ficariam dispensados desta entrega caso amanhã fizesse tempo bom e, similarmente, para os consumidores; é este o sentido dos mercados serem condicionais aos eventos. O exemplo da economia acima, embora demonstre a flexibilidade do modelo de Arrow-Debreu, peca por assumir que existam mercados ativos para todos os bens e todos os eventos futuros. De fato, Arrow (1953) demonstrou que, sob certas hipóteses basta a existência de um mercado para cada evento, e não um para cada evento e cada bem, sendo, portanto, necessários apenas $\ell + a$ mercados onde a é o número de eventos, e não $\ell \cdot a$.

Contudo, mesmo a exigência mais débil de Arrow não se verifica na prática, onde podemos observar apenas um número bastante limitado de mercados futuros, certas "commodities", mercado de ações, etc. A hipótese de que existam mercados completos no sistema de Arrow-Debreu é, portanto, uma hipótese demasiada forte. Esta deficiência tem que ser suprida, na prática, pela consideração de modelos com mercados incompletos; particularmente importante quando se está em presença de incerteza.

Para muitos propósitos é eluciadativa a consideração da ilustração seguinte, conhecida como caixa de Edgeworth.

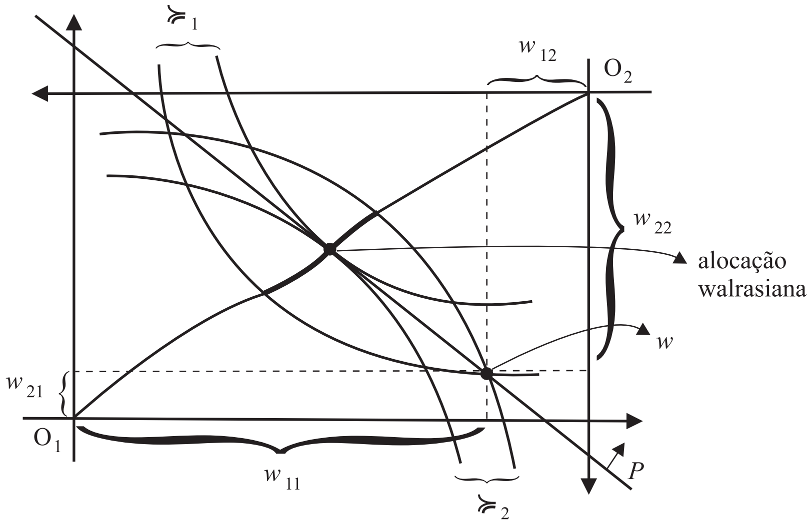


Figura 17

A caixa de Edgeworth é uma representação gráfica de uma economia com dois consumidores, dois bens e sem produção. Um ponto na caixa representa as quantidades do bem 1, eixo horizontal, e do bem 2, eixo vertical, do consumidor 1, que são lidas tendo como referência a origem 1. Ao mesmo ponto, correspondem as quantidades do bem 1, eixo horizontal, e do bem 2, eixo vertical, referentes ao consumidor 2, que são lidas com respeito à origem 2. O comprimento horizontal da caixa é dado pela disponibilidade total do bem 1: $w_{11} + w_{12}$ e, similarmente, para o comprimento vertical. Assim, os pontos da caixa são os pontos factíveis desta economia. A partir da origem 1 traçamos as curvas de indiferença do consumidor 1 e à partir da origem 2, as do consumidor 2. Uma reta que passe pelo ponto w das dotações inciais determina, na sua tangência com uma curva de indiferença de 1, o ponto demandado por 1 ao preço dado pela reta e similarmente para 2. Assim, se as preferências forem convexas uma alocação Walrasiana é um ponto da caixa tal que a reta que passa por ele e pelo ponto que representa as dotações iniciais é tangente às duas curvas de indiferença que passem por este ponto.

Neste capítulo vamos supor que $\succcurlyeq_i$ é contínua, estritamente convexa, localmente não saciada e que Y é estritamente convexo. O excesso de demanda da economia é definido como

$$\begin{aligned} E(p, M) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(p, \succcurlyeq_i, w_i, M) \\ - \sum_{j=1}^{m} \psi(p, Y_j) - \sum_{i=1}^{n} w_i. \end{aligned}$$

Um E.W. é, portanto, um preço p tal que $E(p) = 0$, onde $E(p)$ é o excesso de demanda não restrito.

Um fato trivial mas com conseqüência econômicas interessantes é a

Lei de Walras: Para todo $p \in S_+^{\ell-1}$, $pE(p,M)=0$.

Demonstração: Como o consumidor gasta toda a sua renda

$$\begin{aligned} pE(p,M) &= p\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(p,\succsim_i,w_i,M)-\sum_{i=1}^{n}pw_i-\sum_{j=1}^{m}p\psi(p,Y_j)\\ &=\sum_{i=1}^{n}pw_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\theta_{ij}p\psi(p,Y_j)-\sum_{i=1}^{n}pw_i\\ &\quad -\sum_{j=1}^{m}p\psi(p,Y_j)=0. \end{aligned}$$

A interpretação econômica deste fato pode ser feita dizendo que, se todos os mercados menos um está em equilíbrio e se o preço do mercado restante é positivo, temos que este mercado também tem que estar em equilíbrio.

(b) Existência

Para a demonstração do teorema que nos garante a existência de um equilíbrio Walrasiano vamos necessitar do teorema do ponto fixo de Brouwer que enunciamos a seguir, sem demonstrá-lo. Para uma demonstração deste teorema ver Lima (1981).

Teorema (Brouwer). Seja $f\colon S_+^{\ell-1}\to S_+^{\ell-1}$ contínua. Então existe $\overline{x}\in S_+^{\ell-1}$ tal que $f(\overline{x})=\overline{x}$.

Podemos, agora, demonstrar que o equilíbrio Walrasiano existe. Para simplificar a demonstração vamos inicialmente considerar economias sem produção, i.e., $m = 0$.

Teorema (Existência de equilíbrio). Suponha que as preferências individuais sejam contínuas, estritamente convexas e estritamente monótonas. Suponha também que $w_i \gg 0$ $i = 1, \ldots, n$. Então o equilíbrio Walrasiano existe.

Demonstração: Seja $M > \left\| \sum_{i=1}^{n} w_i \right\|$ e considere

$$g \colon S_+^{\ell-1} \to S_+^{\ell-1}$$

$$\xi_i(p) = \frac{p_i + \max\{0, E_i(p, M)\}}{1 + \sum_{k=1}^{\ell} \max\{0, E_k(p, M)\}}$$

onde E_k é a função excesso de demanda do k-ésimo bem. Então, pelo teorema do Capítulo 1 que garante a continuidade da função de demanda restrita, ξ é contínua.

Pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, existe $\overline{p} \in S_+^{\ell-1}$ tal que $\xi(\overline{p}) = \overline{p}$.

Vamos mostrar que $\overline{p}$ é E.W.. Com efeito, da igualdade acima temos que

$$\overline{p}_i + \overline{p}_i \sum_{k=1}^{\ell} \max\{0, E_k(\overline{p}, M)\} = \overline{p}_i + \max\{0, E_i(\overline{p}, M)\}.$$

Multiplicando ambos os lados por $E_i(\overline{p}, M)$ e somando:

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{\ell} \overline{p}_i E_i(\overline{p}, M)\right)\left(\sum_{i=1}^{\ell} \max\{0, E_i(\overline{p}, M)\}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{\ell} E_i(\overline{p}, M) \max\{0, E_i(\overline{p})\}.\end{aligned}$$

Logo, pela Lei de Walras:

$$\sum_{i=1}^{\ell} E_i(\overline{p}, M) \max(0, E_i(\overline{p}, M)) = 0.$$

Mas, cada termo da soma é não negativo e como a soma é também zero, segue que cada termo precisa ser de fato zero. Portanto,

$$E_i(\overline{p}, M) \max\{0, E_i(\overline{p}, M)\} = 0$$

e, por conseguinte,

$$E_i(\overline{p}, M) \leq 0.$$

Mas,

$$E_i(\overline{p}, M) < 0$$

acarreta, pela Lei de Walras,

$$\overline{p}_i = 0.$$

o que implica, pela monotonicidade estrita de $\succsim_k$, $\varphi(\overline{p}, \succsim_k, w_k, M) = M$, para todo k. Logo, para o bem i,

$$E_i(\overline{p}, M) = nM - \sum_{k=1}^{n} w_{ik} > 0$$

pela escolha de M. O que contradiz $E_i(\overline{p}, M) < 0$ e demonstra que $E_i(\overline{p}, M) = 0$ para todo bem i, i.e., $\overline{p}$ é equilíbrio para a economia na qual os consumidores maximizam suas preferências nos conjuntos orçamentários restritos à bola de raio M. Vamos mostrar, agora, que $\overline{p}$ é, de fato, um E.W. para a economia não restrita. Como já vimos, $\overline{p}_i \neq 0 \,\forall\, i$. Logo, $\varphi(\overline{p}, \succcurlyeq_k, w_k)$ existe para todo consumidor k. Se $\varphi(\overline{p}, \succcurlyeq_k, w_k) = \varphi(\overline{p}, \succcurlyeq_k, w_k, M)$ para todo k, então, nada há a demonstrar: $\overline{p}$ é E.W. da economia não restrita. Suponhamos que para algum k, $\varphi(\overline{p}, \succcurlyeq_k, w_k) \neq \varphi(\overline{p}, \succcurlyeq_k, w_k, M)$. Como $\gamma(p, w_k, M) \subset \gamma(p, w_k)$ temos que $\varphi(\overline{p}, \succcurlyeq_k, w_k) \succ_k \varphi(\overline{p}, \succcurlyeq_k, w_k, M)$. Logo, por convexidade estrita, se $0 < \lambda < 1$

$$\lambda\varphi(\overline{p}, \succ_k, w_k, M) + (1 - \lambda)\varphi(\overline{p}, \succ_k, w_k) \succ_k \varphi(\overline{p}, \succ_k, w_k, M).$$

Por outro lado,

$$||\varphi(\overline{p}, \succ_k, w_k, M|| \leq \left\| \sum_{k=1}^{n} \varphi(\overline{p}, \succ_k, w_k, M) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} w_k \right\| < M.$$

Assim, escolhendo λ suficientemente próximo de 1 podemos obter um ponto de $\gamma(p, w_k, M)$ que faz o consumidor mais feliz do que em $\varphi(\overline{p}, \succcurlyeq_k, w_k, M)$ o que é um absurdo.

Observação: Suponha que em vez de $\succcurlyeq_i$ estritamente crescente supusermos, apenas, $\succcurlyeq_i$ localmente não saciada no teorema acima. Então, como o leitor poderá verificar, uma pequena modificação na demonstração nos permite concluir que existe preço $\overline{p}$ tal que não exista excesso de demanda, i.e., $E(\overline{p}) \leq 0$. Pela Lei de Walras podemos concluir também que, para os bens k para os quais existam excesso de oferta, devemos ter $\overline{p}_k = 0$. Um exercício no final deste capítulo indica que, se os consumidores possuem preferências apenas não saciáveis e não estritamente monótonas, então, podemos ter economias com alguns preços zero e para os quais existe excesso de oferta.

Com auxílio dos resultados do Capítulo 1 que dão a continuidade da função de demanda do consumidor, φ, e a função da firma ψ, podemos demonstrar um teorema de existência de equilíbrio Walrasiano para economias com produção. A demonstração deste teorema é bastante semelhante a do teorema anterior. A única diferença é na escolha de M que neste caso deve ser feita de modo que:

$$M > \left\| \sum_{i=1}^{n} w_i \right\| + \max \left\{ ||x||,\ x \in \sum_{j=1}^{m} Y_j \right\}.$$

Teorema. Suponha $\succcurlyeq_i$ contínua, estritamente convexa e estritamente crescente e $w_i \gg 0$, $i = 1, \ldots, n$. Suponha Y_j estritamente convexas. Então, existe E.W. para $\varepsilon = \{\succcurlyeq_i, w_i, Y_j, \theta_{ij} :\ i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m\}$.

(c) Unicidade

Pela seção anterior sabemos que podemos garantir a existência do equilíbrio Walrasiano, de uma dada economia, se exigirmos certas condições, não muito fortes, nas preferências e tecnologias desta economia. Contudo, não conseguiremos que este equilíbrio seja único, a menos que, estejamos dispostos a fazer fortes hipóteses sobre a economia. A mais conhecida destas hipóteses é a de "substitutos brutos", que definimos a seguir:

Definição. Suponha as funções de demanda C^1.Uma economia é dita satisfazer a hipótese de substitutos brutos se para todo bem i e j, com $i \neq j$, e todo preço p tivermos

$$\frac{\partial E_i(p)}{\partial p_j} > 0.$$

A interpretação econômica desta condição é óbvia: se o preço do bem j sobe então a demanda de qualquer outro, i, aumenta, uma vez que com os preços do bem j mais altos, os consumidores vão preferir os outros bens. Isto é, vão substituir a demanda pelo bem j por outro bem i. Obviamente, para que isto se verifique é necessário que o bem i e o bem j sejam "substituíveis", como é o caso da tangerina com a laranja ou dos automóveis Ford e Chevrolet. Porém, este não é o caso de pneus e gasolina, por exemplo, se o preço da gasolina subir é provável que a demanda por pneus diminua. Por isto, bens deste tipo são chamados de complementares. Assim, uma economia que satisfaça a hipótese de "substitutos brutos" não pode admitir bens complementares. Em um exercício do fim do capítulo está a sugestão de como demonstrar o

Teorema. Se uma economia de pura troca (i.e. $m = 0$) tem a função escesso de demanda C^1 e satisfaz a hipótese de substitutos brutos, então, o E.W., se existe, é único.

Outra hipótese utilizada para a demonstração da unicidade do equilíbrio é o axioma fraco da preferência revelada. Esta hipótese, que não será analisada aqui, essencialmente exige que a função de demanda da economia se comporte como uma função de demanda individual, i.e., como se a economia como um todo maximizasse uma função de utilidade.

Uma outra abordagem realizada sobre o problema de unicidade de equilíbrio foi dada por Debreu (1970). Neste trabalho Debreu demonstrou que, exceto para um número desprezível de economias, temos somente um número finito de equilíbrios, e além disso cada um deste equilíbrios varia de forma contínua com as dotações iniciais da economia.

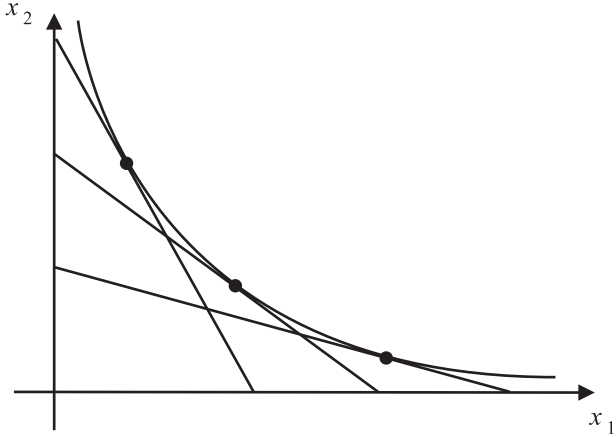


Figura 18

Mais precisamente, suponha que as preferências individuais estão fixas: $\overline{\succcurlyeq}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Suponha também que vale a seguinte propriedade para todo consumidor i: se $p_\alpha \in S^{\ell-1}_{++}$, $p_\alpha \to \overline{p}$ com $\overline{p}_k = 0$, algum k, então $\varphi_k(p_\alpha, \overline{\succcurlyeq}_i, w_i) \to \infty$. Isto é, se o preço de um bem vai para zero então a demanda para este bem vai para infinito.

Exemplo. $p_{1\alpha} \to 0$, $\varphi_1 \to \infty$.

O Teorema de Debreu é como se segue:

Teorema. Suponha que as funções de demanda são C^1 em $\mathbb{R}^\ell_{++}$ e satisfazem as hipóteses acima. Então, existe um conjunto C de medida de Lebesgue nula em $\mathbb{R}^{\ell n}_+$ tal que se $\overline{w} = (\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_n) \in \mathbb{R}^{\ell n}_+ \setminus C$, $\varepsilon = (\overline{\succcurlyeq}_i, \overline{w}_i,\ i = 1, \ldots, n)$ tem somente um número finito, a, de equilíbrios; e existe vizinhança V de $\overline{w}$ contida em $\mathbb{R}^{\ell n}_+ \setminus C$ e funções diferenciáveis $p_1, \ldots, p_a$ definidas em V e com valores em $S^{\ell-1}_+$ tal que para $w \in V$, $p_1(w), \ldots, p_a(w)$ são os únicos equilíbrios de $\varepsilon = \{\overline{\succcurlyeq}_i, w_i,\ i = 1, \ldots, n\}$. A figura abaixo ilustra a situação.

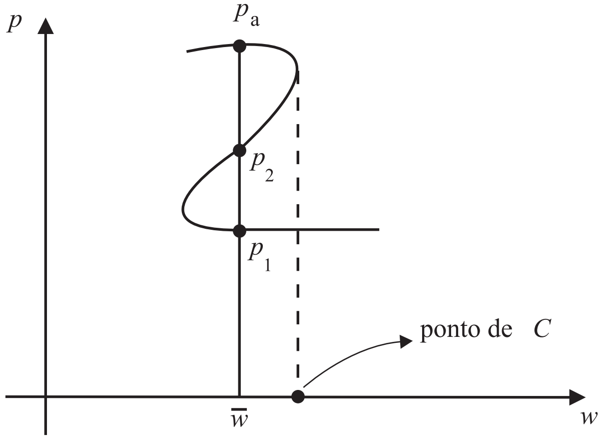


Figura 19

Este resultado não será demonstrado aqui pois depende do teorema de Sard, o que foge aos objetivos destas notas.

Muitas generalizações deste teorema foram obtidas: para incluir economias com produção; para fazer variar as preferências, da mesma forma que as dotações iniciais, etc.

(d) Generalizações e críticas

Muitas das hipóteses que fizemos acima para a demonstração da existência do equilíbrio Walrasiano podem ser relaxadas. A convexidade estrita das preferências pode ser substituída por formas bem fracas de convexidade. Neste caso, a demonstração do teorema de existência pode ser feita com o auxílio do teorema do ponto fixo de Kakutaini em vez do teorema do ponto fixo de Brouwer. Contudo, convém ressaltar que alguma forma de convexidade é necessária para a existência de equilíbrio, como o exemplo abaixo sugere.

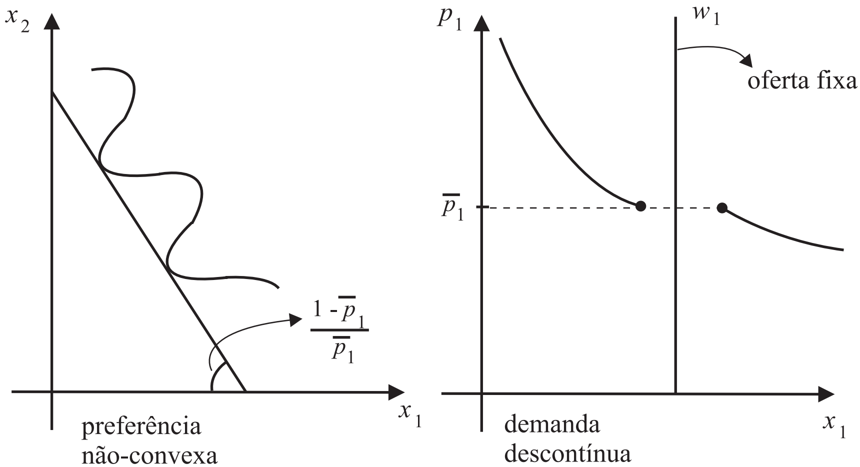


Figura 20

Esta falta de equilíbrio devido a não convexidades pode ser contornada pela hipótese de existência de um número grande ou mesmo infinito de participantes na economia. A existência de um grande número de participantes na economia pode ser usada para a convexificação desta economia. Para tal, podemos utilizar três abordagens distintas: o teorema de convexificação de Shapley-Folkman, utilizado para provar a existência de quasi equilíbrios por Starr, o teorema de convexificação de Liapunov, utilizado por Aumann e, finalmente, a abordagem que utiliza o teorema de Sard, desenvolvida por Sondermann, Mas-Colell e o autor destas notas. Para uma descrição das duas primeiras abordagens ver Arrow-Hahn (1971). Para a abordagem que se utiliza do teorema de Sard, ver Araujo-Mas-Colell (1978).

Muitas outras generalizações do teorema de existência de equilíbrio foram feitas, mas cumpre destacar a demonstração da existência de equilíbrio para economias com preferências não transitivas feita por Araujo-Mas-Colell (1974) (veja também Gale-Mas-

Colell (1975)). Outro resultado notável, obtido na última década, é devido a Sonnenschein (1973), veja também Debreu (1974). Este resultado diz que qualquer função f, contínua definida em $S^{\ell-1}_{+\epsilon}$ $\forall\, \epsilon > 0$, e com valores em $\mathbb{R}^{\ell}_{+}$ homogênea do grau zero, satisfazendo a Lei Walras: $pf(p) \equiv 0$; é a função excesso de demanda de uma economia, i.e., existem $n = \ell$ consumidores com preferências $\succcurlyeq_i$ e dotações iniciais $w_i \in \mathbb{R}^{\ell}_{++}$, tal que, $f(p) = \sum_{i=1}^{n}(\varphi_i(p, \succcurlyeq_i, w_i) - w_i)$.

Das críticas que se possam fazer ao sistema Walrasiano, podemos destacar a que já foi feita na introdução deste capítulo, que diz respeito à suposição de mercados completos. Como vimos, tal suposição é razoável no caso de economias estáticas ou mesmo com um número pequeno de período futuros. Contudo, para economias com um número muito grande de períodos futuros, ou mesmo com incerteza, a hipótese de mercados completos é irrealista. Para amenizar esta situação vários mecanismos foram desenvolvidos, cabendo destacar o equilíbrio temporário onde os consumidores fazem suposições sobre os preços futuros nas decisões de hoje, mas, os preços futuros não tem a obrigatoriedade de serem os preços de equilíbrio do período futuro. Cabe destacar também o conceito de expectativas racionais, onde os agentes econômicos fazem suposições sobre a distribuição de probabilidade nos preços futuros, e, estas suposições se mostram sempre corretas. Isto é, a distribuição de probabilidades dos preços futuros corresponde às expectativas dos agentes econômicos. A crítica que se pode fazer aqui é: se com mercados completos estamos supondo mercados que não existem na economia, ao fazermos a hipótese de expectativas racionais talvez estejamos fazendo hipóteses demasiado fortes sobre a racionalidade do consumidor. Isto é, é preciso ter cuidado no uso das expectativas racionais pois o futuro não é perfeitamente predizível. Uma outra crítica que podemos fazer ao modelo Walrasiano diz respeito ao leiloeiro Walrasiano. Como mencionamos acima, Walras supôs a existência de um leiloeiro que fosse ditando vários preços até que se obtivesse um que igualasse a oferta e a demanda. Quando, então, se realizariam as trocas econômicas, este processo foi denominado de “tatonnement” por Walras. Além de ser uma figura artificial em si mesma, até hoje não se obteve uma formulação boa, do ponto de vista econômico, de como o leiloeiro chega ao equilíbrio através do processo acima descrito. Devemos ressaltar que embora, formulações plenamente satisfatória não tenham sido obtidas até hoje, existe vasta literatura que estuda a estabilidade de certas equações diferenciais que descrevem o processo de ajustamento para o equilíbrio. Isto é, estudam a estabilidade de equações diferenciais do tipo $p = f(E(p))$ onde f é uma função que preserva o sinal.

Exercícios

1. Calcule o equilíbrio da economia sem produção e com preferências dada pelas funções de utilidades

$$u(x_1, \ldots, x_\ell) = \sum_{j=1}^{\ell} c_j \log(x_j + 1) \quad c_j > 0.$$

2. Demonstre o teorema do ponto fixo de Brouwer para $\ell = 2$.

3. Dê exemplo de uma economia com um número infinito de equilíbrios.

   Sugestão: $u_1(x, y) = u_2(x, y) = \min(x, y)$.

4. Dê quatro razões distintas para a não existência de equilíbrio em uma economia com produção.

5. Demonstre que se uma economia satisfaz a hipótese de substitutos brutos então o E.W. se existe é único.

   Sugestão: Suponha que existam dois E.W., $\overline{p}$ e $\overline{\overline{p}}$. Seja $\alpha = \min\limits_i \frac{\overline{p}_i}{\overline{\overline{p}}_i}$ e j tal que $\alpha\overline{\overline{p}}_j = \overline{p}_j$. Então $\alpha\overline{\overline{p}}$ é equilíbrio e se diminuirmos todos os preços de $\alpha\overline{\overline{p}}_i$ para $\overline{p}_i$ devemos ter a demanda do bem j caindo, o que é absurdo uma vez que $\overline{p}$ é equilíbrio.

6. (Gale). Numa economia de trocas existem dois bens: bananas (x) e maçãs (y) e três indivíduos. O indivíduo 1 possui inicialmente a_1 unidades de bananas e 0 de maças. O indivíduo 2 possui inicialmente a_2 unidades de bananas e 0 de maças. Temos $a_1 + a_2 = 2$. O indivíduo 3 possui inicialmente 0 de bananas e 3 unidades de maças. As funções utilidade são:

$$
\begin{aligned}
U_1(x_1, y_1) &= \min\{4x_1, y_1\} \\
U_2(x_2, y_2) &= \min\{x_2, 4y_2\} \\
U_3(x_3, y_3) &= \min\{x_3, y_3\}.
\end{aligned}
$$

   Supondo a_1 e a_2 positivos,

   i) podemos assegurar a existência de um equilíbrio competitivo?

   ii) para que valores de a_1 o sistema (p_1, p_2) de preços de equilíbrio é estritamente positivo?

   iii) para $a_1 = 0,5$ podemos assegurar a unicidade do equilíbrio?

7. (Gale). No exercício anterior, com alguns cálculos concluímos que se $a_1 = a_2 = 1$, existe um único equilíbrio competitivo ao sistema de preços $(1; 0185)$ e com os pontos de consumo $(0,54; 2,29)$; $(0,96; 0,24)$; $(0,47; 0,47)$ respectivamente. Designaremos por alocação I esse equilíbrio competitivo.

Baixando a_1 para $0,96$ obtemos um novo único equilíbrio competitivo ao sistema de preços $(1; 0,163)$ e aos pontos de consumo $(0,58; 2,33)$, $(1,00; 0,25)$, $(0,42; 0,42)$, respectivamente. Obviamente, nesse novo equilíbrio, os indivíduos 1 e 2 estão melhor e o indivíduo 3 pior do que na alocação I.

Supondo que inicialmente $a_1 = a_2 = 1$. Então:

i) o exemplo mostra que se o indivíduo 1 ceder gratuitamente 4% da sua dotação inicial para o indivíduo 2 ambos melhorarão, o que mostra que há casos em que a perda de dotação inicial pode ser benéfica.

ii) a alocação I, embora seja um equilíbrio competitivo não pertence ao núcleo (veja o Capítulo 4 a seguir para a definição de núcleo); com efeito, uma coalizão de 1 e 2 permite que ambos melhorem em detrimento de 3, bloqueando pois a alocação I. Isso significa que o exemplo viola alguma hipótese usada no teorema que prova que todo equilíbrio competitivo pertence ao núcleo de uma economia de trocas.

8. Demonstre o teorema de existência para economias com produção enunciado na seção b acima.
9. Dê exemplo de uma economia com preferências localmente não saciáveis na qual o preço de equilíbrio de um dos bens é zero.
10. Um bem é chamado de bem público se o consumo de uma unidade deste bem por um consumidor não exclui o consumo desta mesma unidade por outro. Dê exemplos de economia sem e com produção e com bens públicos e compute seu equilíbrio, caso exista.

3. A EFICIÊNCIA DE PARETO E SUA RELAÇÃO COM O EQUILÍBRIO WALRASIANO

Nosso objetivo nesta seção é o de estudar um critério de eficiência ao qual devem ser submetidos as alocações factíveis. Como sabemos, em uma economia temos situações conflitivas nas quais alocar mais bens para um participante significa subtrair de um outro. O caso extremo de tal situação é quando estamos alocando um único bem, por exemplo, reais. Tal situação será estudada no Capítulo 5, nos jogos de soma zero. Contudo, em uma economia existem muitas possibilidades de ganhos mútuos através de troca. É justamente esta idéia que motiva a:

Definição. Seja $\varepsilon = \{\succcurlyeq_i, w_i, i = 1, \ldots, n\}$ uma economia sem produção. Uma alocação $x \in FA$ é dita eficiente de Pareto ou ótima de Pareto (e denotada O.P.), se não existir $x' \in FA$ com $x'_i \succ_i x_i$, para todo i. Isto é, uma alocação é dita O.P. caso não exista nenhuma outra alocação que melhores todos os participantes da economia.

Para economias com produção temos a:

Definição. Sejam $\varepsilon = \{\succcurlyeq_i, w_i, \theta_{ij}, Y_j : i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m\}$ uma economia e $FA = \{x \in \mathbb{R}^{\ell n}_+ : \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n w_i + \sum_{j=1}^m y_j, y_j \in Y_j\}$ o conjunto de alocações factíveis. Uma alocação $x \in FA$ é dita O.P. se não existir $x' \in FA$ tal que $x'_i \succcurlyeq_i x_i$, para todo i. Denominamos (x, y) O.P. se $x \in FA$, x é O.P., $\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{j=1}^m y_j = \sum_{i=1}^n w_i$, e $y_j \in Y_j$.

Exemplo 1. Se $\ell = 1$ e $\succcurlyeq_i$ forem estritamente crescentes então toda alocação factível é O.P. com efeito, dada uma alocação factível qualquer outra factível piora alguém.

Exemplo 2. Se $\succcurlyeq_i$ for estritamente crescente $\forall\, i$, então a alocação $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} w_i, 0, 0, \ldots, 0\right)$ é O.P. . Isto é, a alocação que dá todos os bens da economia para um único indivíduo com preferências estritamente crescentes é O.P. .

Este exemplo mostra que não existe nenhuma idéia de justiça no conceito de O.P.; caso queiramos tal idéia temos que introduzí-la de outra forma, como por exemplo através de uma função de bem estar social. (Ver exercícios.) O conceito de O.P. visa apenas a eliminar as alocações para as quais existam outra que faz todos os participantes da economia mais felizes.

É natural testar o E.W., o mais importante dos processos alocativos, quanto à eficiência de Pareto.

Teorema. Seja $\varepsilon = \{\succcurlyeq_i, w_i, \theta_{ij}, Y_j : i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m\}$ uma economia. Então, se (x, y, p) é E.W., (x, y) é O.P. .

Demonstração: Suponha que exista $(x', y') \in FA$ tal que $x'_i \succ_i x_i$ $i = 1, \ldots, n$. Como (x, y, p) é E.W. segue que $\forall\, i \quad px'_i > pw_i + \sum\limits_{j=1}^{m} \theta_{ij}\, py_j$. Pois, caso contrário, o consumidor teria preferido x'_i . Somando em i, obtémos que

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} px'_i > \sum_{i=1}^{n} pw_i + \sum_{j=1}^{m} py_j\,.$$

Mas, por ser (x', y') factível:

$$\sum_{i=1}^{n} x'_i = \sum_{i=1}^{n} w_i + \sum_{j=1}^{m} y'_j \,.$$

Portanto,

$$p\sum_{i=1}^{n} x'_i \leq \sum_{i=1}^{n} pw_i + \sum_{j=1}^{m} py'_j \,.$$

Mas, y_j maximiza o lucro da firma j, por conseguinte, $py'_j \leq py_j$ $j = 1, \ldots, m$. Assim

$$\sum_{i=1}^{n} px'_i \leq \sum_{i=1}^{n} pw_i + \sum_{j=1}^{n} py_j$$

o que contradiz (*) acima.

Em seguida vamos demonstrar um teorema recíproco, que diz que se uma alocação (x, y) é O.P. para $\varepsilon = \{\succcurlyeq_i, w_i, \theta_{ij}, Y_j, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m\}$, então existe uma redistribuição de dotações iniciais $\{w_i^*, i = 1, \ldots, n : \sum\limits_{i=1}^{n} w_i^* = \sum\limits_{i=1}^{n} w_i\}$, para a qual existe $p \in S_+^{\ell-1}$, tal que (x, y, p) é E.W. . Assim, qualquer O.P. pode ser obtido através de um processo descentralizado. Este, aliás, foi um ponto bastante enfatizado por Walras. O teorema anterior e o que vem a seguir são conhecidos como os teoremas fundamentais do bem estar econômico. Junto eles dizem que o conjunto das alocações Paretianas é igual ao conjunto das alocações Walrasianas obtidas pela redistribuição das dotações iniciais. Contudo, o teorema a ser demonstrado a seguir depende da convexidade das preferências e das firmas, em oposição ao teorema que diz que odo E.W. é O.P., que depende apenas do fato de os consumidores gastarem toda a sua renda o que é verdadeiro se as preferências forem localmente não saciáveis. (Veja os exercícios para uma economia com preferências saciáveis com E.W. e com excesso de oferta que não é O.P.).

Para a demonstração do teorema que temos em vista precisamos de um teorma de separação de conjuntos convexos cuja demonstração deixamos para os exercícios, por ser simples e elementar.

Teorema. (a) *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $x \in \overline{A^c}$. Então existe hiperplano separando x e A. Isto é, existe $q \in \mathbb{R}^n$, $q \neq 0$, tal que $qx \geq qa \quad \forall\, a \in A$.*

(b) Sejam A e B dois conjuntos convexos em $\mathbb{R}^n$ sem ponto dos interiores relativo em comum. Então existe hiperplano separando A e B. Isto é, existe $q \in \mathbb{R}^n$, $q \neq 0$, tal que $qa \geq qb$, $\forall\, a \in A$, $\forall\, b \in B$.

Exemplos – Figura 21

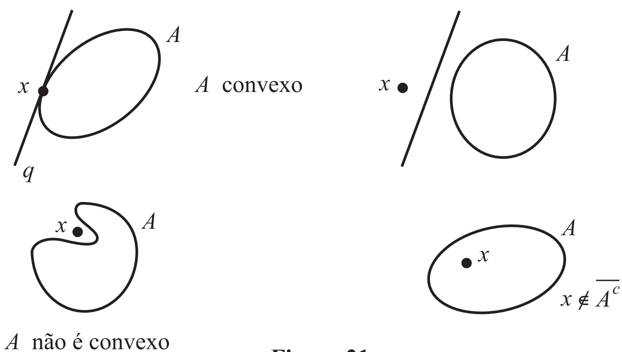


Figura 21

Podemos agora provar o teorema que garante a descentralização dos ótimos de Pareto.

Teorema. Seja $(\bar{x}, \bar{y})$ um O.P. da economia $\varepsilon = \{\succcurlyeq_i, w_i, \theta_{ij}, Y_j :$

$i = 1, \ldots, n : j = 1, \ldots, m\}$ com $\bar{x}_i \gg 0 \;\; i = 1, \ldots, n$. Suponha que $\succcurlyeq_i$ são contínuas, estritamente monótonas e estritamente convexas. Então, existe $\bar{p} \geq 0$ tal que $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ é equilíbrio para a economia ε, no sentido de que as firmas maximizam lucro em $\bar{y}$ e os consumidores maximizam suas preferências em $\bar{x}$ no conjunto $\{x \in \mathbb{R}^\ell_+, px \leq p\bar{x}\}$.

Demonstração: Seja $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{R}^\ell_+, z = \sum_{i=1}^n z_i, \forall\, i\, z_i \succcurlyeq_i \bar{x}_i\}$. Seja $\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^\ell_+, x = w + \sum_{j=1}^m y_j$ com $y_j \in Y_j\}$ onde $w = \sum_{j=1}^n w_j$. Então, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{F}$ são convexos e $\mathcal{P} \cap \mathcal{F} = \emptyset$ pois $(\bar{x}, \bar{y})$ é O.P.. Logo, pelo teorema da separação de dois conjuntos convexos acima existe $\bar{p} \neq 0$ tal que

$$\bar{p}z \geq \bar{p}x \;\forall\; \in \mathcal{P} \quad \text{e} \quad \forall\, x \in \mathcal{F}.$$

Vamos provar que $\forall\, i \;\; \bar{p}_i > 0$. Pela monotonicidade estrita das preferências, temos que $z = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i + (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{P}$ onde o 1 ocorre na i-ésima coordenada. Logo,

$$\bar{p}z \geq \bar{o} \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \quad \text{i.e.} \quad \bar{p}_i \geq 0.$$

Como o i é arbitrário podemos concluir que $\bar{p} \geq 0$. Vamos mostrar em seguida que $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ é equilíbrio no sentido descrito acima.

Inicialmente, vamos verificar que $\forall\, i_0$, se $x'_{i_0} \succ_{i_0} \bar{x}_{i_0}$, então $px'_{i_0} \geq p\bar{x}_{i_0}$. Com efeito, pela continuidade de $\succcurlyeq_{i_0}$ se $x'_{i_0} \succ_{i_0} \bar{x}_{i_0}$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que, $\forall\, w_{i_0} \in B_\varepsilon(x'_{i_0}) \;\; x_{i_0} \geq 0$. Temos

$$x_{i_0} \succ_{i_0} \bar{x}_{i_0}.$$

Pela monotonicidade estrita de $\succ_{i_0}$, existe k_0 tal que

$$x'_{i_0 k_0} > \bar{x}_{i_0 k_0}.$$

Seja

$$0 < \varepsilon' < \min\{x'_{i_0k_0} - \bar{x}_{i_0k_0}, \varepsilon\}$$

e considerando a seguinte alocação

$$x''_{i_0k} = \begin{cases} x'_{i_0k_0} - \varepsilon', & k = k_0 \\ x'_{i_0k}, & k \neq k_0 \end{cases}$$

e, para $i \neq i_0$

$$x''_{ik} = \begin{cases} \bar{x}_{ik_0} + \dfrac{\varepsilon'}{2(n-1)}, & k = k_0 \\ \bar{x}_{ik}, & k \neq k_0 \end{cases}$$

Então, $\forall\, i \quad x''_i \succ_i \bar{x}_i$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} x''_i \in \mathcal{P}.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} 0 \leq \bar{p}\sum_{i=1}^{n} x''_i - \bar{p}\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \ &\leq \\ \leq \bar{p}x'_{i_0} - \bar{p}_{k_0}\varepsilon + \bar{p}\sum_{i\neq i_0} \bar{x}_i \ &+ \\ + \bar{p}_{k_0}\frac{\varepsilon'}{2} - \bar{p}\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \ &= \\ = \bar{p}x'_{i_0} - \bar{p}\bar{x}_{i_0} - \bar{p}_{k_0}\frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

como $\bar{p}_{k_0} \geq 0$, temos que $\bar{p}x'_{i_0} \geq \bar{x}_{i_0}$, como queríamos.

Vamos mostrar, agora, que para $\forall\, i_0$

$$x'_{i_0} \succ_{i_0} \bar{x}_{i_0} \Rightarrow px'_{i_0} > p\bar{x}_{i_0}\,,$$

e a prova de que $\bar{x}_{i_0}$ maximiza $\succcurlyeq_{i_0}$ em $\{x \in \mathbb{R}^\ell_+, px \leq p\bar{x}_{i_0}\}$ estará terminada.

Com efeito, suponha que $x'_{i_0} \succ_{i_0} \bar{x}_{i_0}$ então, como acabamos de ver, $px'_{i_0} \geq p\bar{x}_{i_0}$. Suponha, por absurdo, que $px'_{i_0} = p\bar{x}_{i_0}$. Por continuiade, existe $0 < \lambda < 1$ tal que $\lambda x'_{i_0} \succ_{i_0} \bar{x}_{i_0}$ o que acareta $p\lambda x'_{i_0} \geq p\bar{x}_{i_0}$.

Por conseguinte,

$$\lambda p\bar{x}_{i_0} \geq p\bar{x}_{i_0}$$

como

$$\bar{x}_{i_0} \gg 0 \quad \text{e} \quad p \geq 0,\, p \neq 0,$$

temos que

$$p\bar{x}_{i_0} > 0$$

o que acarreta

$$\lambda \geq 1$$

o que é absurdo.

Finalmente, a demonstração de que

$$\forall\, y_j \in Y_j = py_j \leq p\bar{y}_j$$

é deixada para o leitor.

Vejamos como é a relação entre otimalidade de Pareto e equilíbrio Walrasiano, para economias sem produção, em uma caixa de Edgeworth.

Como vemos, numa caixa de Edgeworth, os pontos eficientes de Pareto são aqueles de tangência mútua das curvas de indiferença dos dois consumidores. Como já vimos anteriormente, os E.W. são, também, pontos de tangência comum das curvas de indiferença. Assim, a inclusão E.W. $\subset$ O.P. e evidente. A ilustração gráfica da da outra relação acima estabelecida também é óbvia. Dado um ponto que é O.P. e se tivermos convexidade, além das outras hipóteses, então a reta tangente comum às duas curvas de indiferença que passam por este ponto nos dá um preço competitivo.

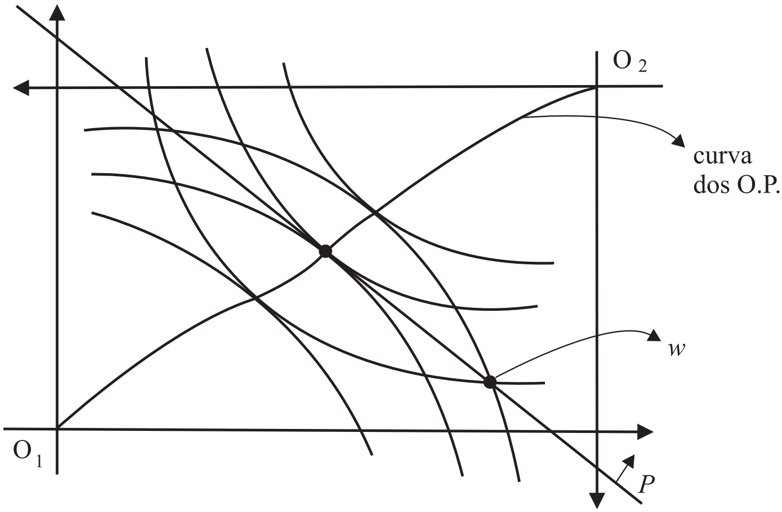


Figura 22

Exercícios

1. Mostre que se não tivermos convexidade então pode existir O.P. que não seja passível de descentralização.

2. Mostre que $\bar{x}$ maximiza, em FA, uma função de bem estar econômico do tipo $\sum_{i=1}^{n} a_i u_i(x_i)$ (com $a_i > 0$) então $\bar{x}$ é O.P..

3. Mostre a recíproca do Exercício 2, i.e., se $\bar{x}$ é O.P. então $\bar{x}$ maximiza alguma função de bem estar $\sum_{i=1}^{n} a_i u_i(x_i)$ com $a_i > 0$.

4. Termine a demonstração da descentralizabilidade dos ótimos de Pareto.

5. Demonstre a parte (a) do teorema de separação de conjuntos convexos no caso $x \notin \bar{A}$.

   Sugestão: Prove que existe $\bar{a} \in \bar{A}$, tal que $||x-\bar{a}|| = \inf\limits_{a \in A} ||a-\bar{a}||$. Logo, $\forall\, a \in A$, $\quad ||\bar{a} + \lambda(a-\bar{a}) - x||^2 \geq ||\bar{a}-x||^2$, $1 \geq \lambda \geq 0$. Expandindo os produtos internos obtemos:

   $$2\lambda(a-\bar{a}, \bar{a}-x) + \lambda^2(a-\bar{a}, a-\bar{a}) \geq 0$$

   logo, $(a-\bar{a}, \bar{a}-x) \geq 0$ e, por conseguinte $(a, \bar{a}-x) \geq (\bar{a}, \bar{a}-x)$. Basta, portanto, tomar $q = \bar{a} - x$.

6. Prove a parte (a) do teorema de separação de conjuntos convexos no caso $x \in \bar{A}$.

   Sugestão: Seja $x_n \notin \bar{A}$ tal que $x_n \to x$. Seja q_n como no exercício anterior e considere $\dfrac{q_n}{||q_n||} = q'_n$, extraia subseqüência convergente de q'_n e seja q seu limite.

7. Demonstre a parte (b) do teorema de separação de conjuntos convexos.

   Sugestão: Considere o conjunto convexo $A - B$. Então $0 \notin (A-B)^0$, e o resultado segue pela parte (a) do teorema.

8. Dê exemplo de uma economia com preferências que não seja localmente não saciáveis e com um E.W. que não é O.P. .

9. Defina O.P'. como o conjunto de pontos $x \in FA$ tais que não existe $x' \in FA$ com $x'_{i_0} \succ_{i_0} x_{i_0}$ e $\forall\, i\, x'_i \succcurlyeq x_i$. Qual a relação entre O.P. e O.P1.? Dê exemplos.

4. O NÚCLEO E SUA RELAÇÃO COM O EQUILÍBRIO WALRASIANO

O processo alocativo que vamos descrever nesta seção é baseado numa idéia de jogo cooperativo. Isto é, os participantes da economia tentam formar subgrupos que lhes possam trazer trocas mutuamente vantajosas. Formalmente, temos a seguinte:

Definição. Uma coalizão, S, é simplesmente um subconjunto não vazio do conjunto dos jogadores, i.e., $\emptyset \neq S \subset \{1, \ldots, n\}$.

Neste capítulo vamos considerar, somente, economias de pura troca, i.e., sem produção.

Definição. Uma coalizão S broqueia uma alocação factível $x \in \mathbb{R}_+^{\ell n}$ se existir alocação $y \in \mathbb{R}_+^{\ell(\#S)}$ tal que:

(i) $\sum_{i \in S} y_i = \sum_{i \in S} w_i$, i.e., a alocação y é factível para a coalização.

(ii) $\forall\, i \in S, \quad y_i \succ_i x_i$, i.e., a alocação y melhora os membros da coalizão S, em relação a alocação x.

Definição. Uma alocação $x \in FA$ é dita pertencer ao núcleo (ou core) se não existir coalizão que a bloqueie.

Como vemos, o núcleo é um conceito totalmente distinto de equilíbrio Walrasiano. O núcleo, por exemplo, não involve preços nem é descentralizado. Neste conceito temos somente a idéia que em uma economia os indivíduuos podem, caso não estejam satisfeitos com o seu quinhão, formar coalizões para benefício mútuo, bloqueando assim uma alocação que os desfavoreça. Por exemplo, os cidadãos dos Estados Unidos declararam sua independência da Inglaterra porque não tinham retorno adequado dos impostos que pagavam.

Assim, dada a assimetria, é surpreendente que este conceito apresente um conjunto de soluções tão relacionado com o E.W., como veremos a seguir.

Teorema. Se x está no núcleo então x é O.P. .

Demonstração: Suponha que x não seja O.P. então, existe $x' \in FA$ tal que $x'_i \succ_i x_i$ portanto, a coalizão $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ bloqueia x que não pode estar no núcleo.

Teorema. Se x é E.W. então x está no núcleo.

Demonstração: Suponha que $x \notin$ núcleo, então existe $S \neq \emptyset$ bloqueando x, i.e., $\exists\, y \in \mathbb{R}_+^{\ell(\#S)}$ tal que

$$\sum_{i \in S} y_i = \sum_{i \in S} w_i$$
$$y_i \succ_i x_i \quad \forall\, i \in S.$$

Então $py_i > px_i =$ p.w. o que acarreta

$$p \sum_{i \in S} w_i = p \sum_{i \in S} y_i > p \sum_{i \in S} x_i = p \sum_{i \in S} w_i \,,$$

que é uma contradição.

A recíproca do teorema acima é falsa. Isto é, existe ponto que está no núcleo e não é equilíbrio Walrasiano (veja exercícios). Contudo, quando o número de consumidores cresce o núcleo decresce para o E.W.. Esta foi uma conjectura feita no século passado por Edgeworth e provada rigorosamente por Debreu e Scarf (1963). Para uma formução rigorosa deste resultado existem dois métodos. O método que apresentamos aqui supõe inicialmente uma economia com um número finito a de tipos de agentes econômicos e a multiplica, i.e., considera as economias com $2a, 3a, \ldots, ra, \ldots,$ agentes sendo $2, 3, \ldots, r$ de cada tipo. O segundo método considera a economia como sendo representada por uma medida de probabilidade, sem átomos no espaço de características dos agentes, i.e., no produto cartesiano de $\mathbb{R}^\ell_+$ (dotações iniciais) com o espaço de preferências, considerando uma topologia conveniente (a topologia de Hausdorff ou da convergência fechada, por exemplo). Um ponto comum, contudo, a estes dois métodos é que neles cada indivíduo na economia pode ser considerado desprezível do ponto de vista da economia como um todo, isto é, nenhum agente econômico tem poder de mercado. Assim, com muitos agentes, o conceito do núcleo (que admite os indivíduos explorando o poder de barganha) fica equivalente ao equilíbrio Walrasiano (um conceito puramente competitivo, i.e., um conceito próprio para muitos agents que não tenham individualmente poder de mercado).

Passamos agora às formalizações.

Definição. Por uma r-réplica da economia com dois agentes $(\succcurlyeq_A, w_A)$ e $(\succcurlyeq_B, w_B)$, devemos entender uma economia, ε_r , com $2r$ consumidores sendo os r primeiros com características $(w_A, \succcurlyeq_A)$ e os r seguintes com caractísticas $(w_B, \succcurlyeq_B)$.

Vamos iniciar com o:

Lema (Tratamento igual no núcleo). Sejam $\succcurlyeq_i$ $(i = A, B)$ estritamente convexas, estritamente monótonas e contínuas. Então se

$x \in$ núcleo de ε_r, temos que $x_i = x_j$ se i e j são do mesmo tipo.

Demonstração: Suponha que dois indivíduos do tipo 1 não recebam a mesma cesta de bens. Sem perda de generalidade vamos supor que o indivíduo do tipo A com pior tratamento no núcleo é o de número um, i.e.,

$$x_{1A} \preccurlyeq x_j \quad j = 2, \ldots, r$$

e seja o $r+1$, o pior tratado de tipo B, i.e.,

$$x_j \succcurlyeq_B x_{r+1} \quad j = r+2, \ldots, 2r.$$

Seja, agora, a coalizão $S = \{1, r+1\}$ e a alocação:

$$\bar{x}_A = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} x_j\,, \quad \bar{x}_B = \frac{1}{r}\sum_{j=r+1}^{2r} x_j\,,$$

essa alocação é factível: com efieto, pela factibilidade de x

$$\bar{x}_A + \bar{x}_B = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{2r} x_j = \frac{1}{r}(w_A + r w_B) = w_A + w_B\,.$$

Por convexidade estrita,

$$\bar{x}_A \succ_A x_1$$

e

$$\bar{x}_B \succcurlyeq_B x_{r+1}\,.$$

Por continuidade e monotonicidade estrita podemos retirar um pouco dos bens de 1, repasá-los a $r+1$ e assim obter uma nova alocação factível para a coalizão S, que melhora estritamente a 1 e a $r+1$.

Assim, esta coalizão S bloqueia x que não podem portanto, estar no núcleo.

Tendo em vista o tratamento igual no núcleo podemos considerar os pontos do núcleo da r-réplica de uma economia com dois agentes, $\mathcal{N}(\varepsilon_r)$, como estando em $\mathbb{R}_+^{2\ell}$. Notemos também que $\forall\, r \geq 1$ $\;$ E.W. (ε_r) = E.W. (ε_1), nesta interpretação da economia ε_r. Vamos agora ao teorema da equivalência do núcleo:

Teorema. Suponha $w_A, w_B \in \mathbb{R}_{++}^\ell$, $\succsim_A$, $\succsim_B$ estritamente convexas, estritamente crescentes e contínuas, então

$$\bigcap_{r=1}^{\infty} \mathcal{N}(\varepsilon_r) = \text{ E.W.}(\varepsilon_1).$$

Demonstração: Como E.W.(ε_1) = E.W.$(\varepsilon_r) \subset \mathcal{N}(\varepsilon_r)$ basta mostrar que se $x \in \bigcap\limits_{r=1}^{\infty} \mathcal{N}(\varepsilon_r)$ então $x \in$ E.W.(ε_1). Seja $\mathcal{P}_i = \{z \in \mathbb{R}_+^\ell \,:\, z + w_i \succ_i x_i\}$ e $\mathcal{P}$ o fecho convexo de $\bigcup\limits_{i=1}^{2} P_i$. Afirmamos que $0 \notin \mathcal{P}$ pois, do contrário, $0 = \sum\limits_{i=1}^{2} \alpha_i z_i$, com $z_i \in \mathcal{P}_i$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{2} \alpha_i = 1$. Seja $I = \{i : \alpha_i > 0\}$ e a_i^r o menor inteiro com $a_i^r \geq r\alpha_i$, para cada $i \in I$ e para cada r. Seja $z_i^r = \left(\dfrac{r\alpha_i}{a_i^r}\right) z_i$, temos que $\lim\limits_{r\to\infty} \left(\dfrac{r\alpha_i}{a_i^r}\right) = 1$. Daí, $z_i^r \to z_i$, como $z_i + w \succ_i x_i$, por continuidade, $\exists\, r_0$ tal que $r > r_0 \Rightarrow z_i^r + w_i \succ_i x_i$, considere agora a coalizão S em ε_r, com a_i^r membros do tipo i. Podemos alocar $z_i^r + w_i$ para cada um deles. Com efeito, $\sum\limits_{i=1}^{2} a_i^r (z_i^r + w_i) = \sum\limits_{i=1}^{2} a_i^r w_i$, uma vez que por hipótese $\sum_{i=1}^{2} a_i^r z_i^r = \sum_{i=1}^{2} r\alpha_i z_i = 0$. O que mostra ser possível bloquear a alocação x, fato que contradiz a hipótese $x \in \bigcap_{r=1}^{\infty} \mathcal{N}(\varepsilon_r)$. Como $0 \notin \mathcal{P}$, $\exists\, p \neq 0$ com $pz \geq 0$, $\forall\, z \in \mathcal{P}$. Mas, $x' \succ_i x_i \Rightarrow x' - w_i \in \mathcal{P}_i \Rightarrow x' - w_i \in \mathcal{P} \Rightarrow px' \geq pw_i$. Por continuidade $x \succ_i x_i \Rightarrow px \geq pw_i$. Como $x_i \succ_i x_i$ temos $px_i \geq pw_i$. De fato temos $px_i = pw_i \,\forall\, i$. Pois, caso contrário, $p\left(\sum_{j=1}^{2} x_j\right) > p\left(\sum_{j=1}^{w} w_j\right) = p\left(\sum_{j=1}^{2} x_j\right)$ o que é absurdo.

Vamos provar agora que (p, x) é E.W.. Suponha $p \geq 0$ e $x' \succ_i x_i$ então caso tenhamos $px' = pw_i$, podemos por monotonicidade achar $x'' \succ_i x_i$ com $px'' < pw_i$, o que é absurdo. Logo $x' \succ_i x_i \Rightarrow px' > pw_i$. Só nos resta, portanto, provar que $p \geq 0$. Suponha por absurdo que exista j com $p_j < 0$. Seja $z \in \mathcal{P}_i \subset \mathcal{P}$, então $pz \geq 0$ e seja

$$\begin{cases} z_i^n = z_i & i \neq j \\ z_j^n = n + z_j \end{cases}$$

por monotonicidade, $z^n \in P$ e $pz^n \to -\infty$ o que é absurdo.

Exercícios

1. Mostre na caixa de Edgeworth quais os pontos do núcleo.

2. Dê exemplos nos quais E.W. $\neq \mathcal{N}$.

3. Calcule o núcleo e o conjunto de Pareto da economia:
   $n = \ell = 2$; $u_1(x) = ax_1x_2$; $u_2(x) = bx_1 + x_2$; $a > 0, b > 0$.

4. Dê um exemplo da diminuição do núcleo devido ao aumento do número de agentes econômicos.

5. TEORIA DOS JOGOS

A teoria dos jogos não cooperativos, estudados neste capítulo, nos oferece formas adicionais às já estudadas anteriormente, de alocar o que a sociedade dispõe, entre os seus membros constituintes. A diferença básica dos métodos tratados aqui em oposição ao que foi visto no Capítulo 4 é que aqui nós consideramos situações nas quais os indivíduos vêem seus interesses mais imediatos. Se no conceito do núcleo os indivíduos se associam para a obtenção de vantagens mútuas, aqui os indivíduos têm um comportamento muito mais independente e um modo de atuação mais individualista. Embora nas duas situações o indivíduo busque seu interesse particular aqui ele o faz por conta própria. Para material relacionado a este capítulo o leitor é referido ao livro de Owen (1968).

(a) Jogos de soma zero e o teorema de exist encia de solução minimax

O primeiro jogo que vamos estudar é o jogo de soma zero estudado por von-Neumann e Morgenstern (1944). Aqui nós vamos nos restringir ao caso de dois jogadores.

Considere a situção na qual o jogador I pode fazer as escolhas $1, 2, \ldots, m$; e o jogador II pode escolher entre $1, 2, \ldots, n$. Suponha que se I escolhe i e II escolhe j, o retorno de I é $A(i, j)$ e o de II $B(i, j)$. O jogo é dito de soma constante quando $A(i, j) + B(i, j) = C$, isto é, o jogador I ganha, o jogador II deixa de ganhar. Esta situação não é a mais típica do ponto de vista econômico uma vez que a maioria das situações econômicas involvem possibilidades de ganhos mútuos. Contudo, os jogos de soma constante são importantes para descrever situações como a de repartir um bolo, i.e., uma quantia fixa de um bem econômico, que pode ser uma quantia em reaiss, por exemplo. Como C é arbitrário, podemos fazê-lo zero e temos assim os jogos de soma zero. Dada esta situação, o jogador I vai agir de modo a

$$\max_{i\in\{1,\ldots,m\}} \min_{j\in\{1,\ldots,n\}} A(i,j)$$

e o jogador II

$$\min_{j\in\{1,\ldots,n\}} \max_{i\in\{1,\ldots,m\}} A(i,j)$$

i.e., o jogador I faz a escolha que maximize seu retorno tomando como um dado que o seu oponente faz a escolha que minimize este retorno. O jogador II, por sua vez, faz sua escoha de modo a minimizar o retorno de I levando em consideração que I faz sua escolha de modo a maximizar $A(i,j)$.

Caso tenhamos a igualdade

$$\max_i \min_j A(i,j) = \min_j \max_i A(i,j) = v,$$

temos uma solução ou equilíbrio do jogo uma vez que neste caso, se i_0 e j_0 são ais que $A(i_0, j_)) = v$ o jogador I deve escolher i_0, o jogador II j_0 e nenhum tem incentivo para mudar de estratégia. Tal situação ocorre no jogo mostrado na Figura 23.

Exemplo: A pergunta que surge é se temos sempre a igualdade: $\max_i \min_j A(i,j) = \min_j \max_i A(i,j)$. A resposta a esta pergunta é negativa uma vez que podemos ter $\max_i \min_j A(i,j) < \min_j \max_i A(i,j)$, como mostra o jogo exemplificado na Figura 24.

$i \backslash j$	1	2
1	0	$1/2$
2	$1/2$	1

$$\min_j \max_i A(i,j) =$$

$$\max_i \min_j A(i,j) =$$

$$= 1/2 = A(2,1).$$

Figura 23

$i \backslash j$	1	2
1	0	1
2	1	0

$$\min_j \max_i A(i,j) = 1$$

$$\max_i \min_j A(i,j) = 0$$

Figura 24

O exemplo nos diz, portanto, que se os jogadores usarem as estratégias acima descritas podemos não ter equilíbrio ou solução do jogo.

Vamos agora expandir o conjunto das possíveis ações de cada jogador. Em vez do jogador I ter que escolher entre as possibilidades $\{1, \ldots, m\}$ vamos supor que ele escolha probabilidades x_1 de jogar 1, x_2 de jogar $2, \ldots,$ x_m de jogar m. Naturalmente, com $x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$. E similarmente para II.

Estas novas estratégias são chamadas de mistas, em oposição às anteriores, denominadas simples ou puras. Dadas as estratégias mistas x e y o retorno de I é simplesmente o valor esperado, i.e.,

$$x\,A\,y.$$

Podemos enunciar o teorema que nos garante que sempre existe solução para jogos de soma zero com estratégias mistas.

Teorema. $\max\limits_x \min\limits_y x'Ay = \min\limits_y \max\limits_x x'Ay.$

Demonstração: Necessitamos do

Lema: $\max\limits_i \min\limits_j A(i,j) \le \min\limits_j \max\limits_i A(i,j).$

Demonstração do lema: Seja i_0 tal que

$$\max_i \min_j = \min_j A(i_0, j)$$

e j_0 tal que

$$\min_j \max_i A(i,j) = \max_i A(i, j_0)$$

então,

$$\max_i \min_j A(i,j) \le A(i_0, j_0)$$

e

$$A(i_0, j_0) \le \min_j \max_i A(i,j)$$

o que prova o lema. $\square$

Seja

$$v_1 = \max_x \min_y x'Ay \le \min_y \max_x x'Ay = v_2\,.$$

Seja

$$\mathcal{M} = \{m \in \mathbb{R}^m,\, m_i = \sum_{j=1}^{n} A(i,j)y_j\,,\, \sum_{i=1}^{n} y_j = 1, y_j \geq 0\}$$

que é convexo e fechado. É óbvio que:

$$\min_y \max_x x'Ay = \min_{m\in\mathcal{M}} \max_x xm = v_2\,.$$

Considere $\mathcal{M}(v_2)$, o ortante aberto com vértice em v_2 : $\mathcal{M}(v_2) = \{t \in \mathbb{R}^m, t_i < v_2,\, i = 1, \ldots, m\}$. Temos que $\mathcal{M}(v_2) \cap \mathcal{M} = \emptyset$. Com efeito, suponha que não e seja $z \in \mathcal{M}(v_2) \cap \mathcal{M}$. Então,

$$v_2 = \min_{m\in\mathcal{M}} \max_x xm \leq \max_x xz \leq \max_{i,\alpha\in[0,1]} \alpha z_i < v_1,$$

o que é uma contradição.

Pelo teorema da separação de conjuntos convexos, existe (p, λ), $p \neq 0$ tal que $p\cdot z \leq \lambda$, $\forall\, z \in \mathcal{M}(v_2)$ e $pz \geq \lambda$, $\forall\, z \in \mathcal{M}$. Concluímos que $p \geq 0$ porque se $p_i < 0$ para algum i, poderíamos tomar $z \in \mathcal{M}(v_2)$, $z_i \to -\infty$ e quebrar a condição $p \cdot z \leq \lambda$. Como $p \neq 0$, $p_i \geq 0$, $\Sigma p_i > 0$. Seja $\bar{p} = \frac{p}{\Sigma p_i}$ e $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\Sigma p_i}$. Então

$$\bar{p} \leq \bar{\lambda}, \quad \forall\, z \in \mathcal{M}(v_2)$$

e

$$\bar{p}z \geq \bar{\lambda}, \quad \forall\, z \in \mathcal{M}.$$

Observe que $\bar{\lambda} \geq v_2$ pois se $\bar{\lambda} < v_2$ então tome $\alpha \in (\bar{\lambda}, v_2)$, e $z' = (\alpha, \ldots, \alpha) \in \mathcal{M}(v_2)$. Então $\bar{p}z' = \sum_{i=1}^{n} p_i\alpha = \alpha > \bar{\lambda}$, o que é absurdo. Logo

$$v_1 = \max_x \min_y x'Ay = \max_x \min_{m\in\mathcal{M}} xm \geq \min_{m\in\mathcal{M}} \bar{p}m \geq \bar{\lambda} \geq v_2,$$

o que completa a demonstração.

Logo, se $p \geq 0$,

$$v_1 \geq \min_{z \in \mathcal{M}} pz \geq v_2$$

e a prova do teorema está completa.

Vamos provar, portanto, que $p \geq 0$. Suponha que $p_i < 0$ para algum i.

Seja $\bar{z} \in \mathcal{M}(v_2)$ e z^n definido por:

$$z_j^n = \begin{cases} \bar{z}_j & j \neq i \\ \bar{z}_i - n & j = i \end{cases}$$

então $z^n \in \mathcal{M}(v_2)$ e $pz^n \to +\infty$ o que contradiz $pz \leq p\bar{\bar{z}}$ $\forall\, z \in \mathcal{M}(v_2)$ e $\bar{\bar{z}} \in \mathcal{M}$ fixo.

Os jogos de soma zero podem ser criticados do çponto de vista econômico por descreverem situações que envolvem uma quantidade fixa de um único bem. Outro defeito do conceito solução que estudamos para jogos de somas zero é que ela depende de termos dois jogadores apenas.

(b) O conceito de equilíbrio de Nash-Cournot e sua existência

Vamos agora estudar outro conceito de equilíbrio usado por Nash (1950).

Seja S_i o conjunto de estratégias do jogador i. Seja $u_i \colon \prod_{i=1}^{n} S_i \to \mathbb{R}$ a função de retorno do jogador i. Então o conceito de equilíbrio de Nash (ou Nash-Cournot) é dado pela

Definição: $\bar{s} = (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n) \in \prod_{i=1}^{n} S_i$ é o equilíbrio de Nash se e só se $\forall\, i \quad u_i(\bar{s}) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, \bar{s}_i)$ onde

$$\bar{s}_{-i} = (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{i-1}, \bar{s}_{i+1}, \dots, \bar{s}_n)$$

e

$$(s_i, \bar{s}_{-i}) = (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{i-1}, s_i, \bar{s}_{i+1}, \dots, \bar{s}_n)$$

Convém notar que esta definição além de admitir um número arbitrário de jogadores não depende da hipótese de soma zero.

Para a demonstração da existência de equilíbrio de Nash-Cournot vamos necessitar de um teorema de ponto fixo para correspondências.

Teorema (Kakutani). Seja $S \subset \mathbb{R}^m$ compacto e convexo. Seja $\varphi\colon S \to S$ correspondência semicontínua superior (s.c.s.) e com valores convexos. Então φ tem um ponto fixo, i.e., $\exists\, \bar{x} \in S$ com $\bar{x} \in \varphi(\bar{x})$.

Agora, podemos provar o teorema de existência de equilíbrio de Nash.

Teorema. Seja S_i compacto e convexo, $S = \prod_{i=1}^{n} S_i$. Seja $u_i\colon S \to \mathbb{R}$ contínua e quasi-côncava, $\forall\, i = 1, \dots, n$. Então existe equilíbrio de Nash.

Observação: Uma função $f\colon A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ é quasi-côncava se $\{x, f(x) \geq \alpha\}$ é convexo para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Seja $\psi_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i \mid u_i(s_i, s_{-i}) = \max_{t \in S_i} u_i(t, s_{-i})\}$. Pelo teorema do Capítulo 1, ψ é s.c.s. e tem valores convexos, pela quasi-concavidade de u_i em S_i. Então,

$$\psi(s) = \psi_1(s_{-1}) \times \cdots \times \psi_N(s_{-n})$$

é s.c.s. e de valores convexos. Ademais, $S = \prod_{i=1}^{N} S_i$ é convexo e compacto. Logo pelo teorema do ponto fixo de Kakutani existe $\bar{s} \in S$ tal que $\bar{S} \in \psi(\bar{s})$, i.e., $\bar{s}_i \in \psi_i(\bar{s}_{-i})$. Segue-se então que $\bar{s}_i$ maximiza $u_i(t, \bar{s}_{-i})$ para $t \in S_i$, i.e., $\bar{s}$ é solução de Nash-Cournot.

Exemplo: $S_i =$ estratégias mistas do jogador i.

$$u_i(s) = \sum_{j_1,\ldots,j_n} a^i_{j_1,\ldots,j_n} s_{ij_1} s_{2j_2} \ldots s_{nj_n}$$

onde $a^i_{j_1,\ldots,j_n}$ é o retorno de i. Quando as estratégias puras $j_1, \ldots, j_n$ são jogadas por $1, \ldots, n$ e, s_{kj_k} é a probabilidade com a qual o jogador k escolhe a estratégia j_k.

A pergunta natural que surge agora é como os conceitos de equilíbrio de jogos apresentados nesta seção, se comportam com respeito a eficiência de Pareto. Convém lembrar, inicialmente, que estamos lidando com situações um pouco distintas da que foi usada na definição do conceito de O.P. da seção 3. Mas, é óbvio que a idéia de O.P. também aplica-se às questões aqui tratadas.

É claro que pela própria definição de jogos de soma zero toda alocação é O.P. e não apenas a solução minimax, uma vez que só existe um bem e tudo que não é alocado pra o jogador I vai para o jogador II. Com respeito aos jogos de Nash-Cournot considere-se o seguinte famoso exemplo: o dilema do prisioneiro. Existem dois jogadores (prisioneiros) que são chamados em salas isoladas para confessarem um crime que cometeram. A matriz de retornos (número de anos de prisão) é a seguinte

II / I	NÃO CONFESSA	CONFESSA
NÃO CONFESSA	(1,1)	(5,0)
CONFESSA	(0,5)	(2,2)

onde o par (a, b) indica a anos de prisão para I e b para II. É óbvio que a estratégia em que I e II confessam é a única solução de Nash-Cournot. Todavia, tal solução não é O.P.. As outras entradas da matriz são O.P. mas a solução interessante para os prisioneiros é: I não confessa e II não confessa, que pode ser obtida caso os prisioneiros consigam agir de forma cooperativa entre si. É interessante observar que se o jogo dos prisioneiros se repetir um número infinito de vezes os jogadores podem cooperar, pois, se I não confessar e II confessar na primeira vez que o jogo for jogado, a partir da segunda rodada I não vai mais confiar em II e passará a confessar, o que será desastroso para II. Mas, se o jogo só é repetido um número finito de vezes, na última rodada cada jogador será tentado a enganar o adversário o que alastrará a desconfiança dos jogadores da última até a primeira rodada e teremos novamente a solução não cooperativa.

(c) Jogos com pagamentos laterais

Uma outra forma de se formalizar um jogo cooperativo é através de uma função v, chamada de função característica do jogo. Seja

2^N o conjunto dos subconjuntos de $N = \{1, \ldots, n\}$. Então,

$$v \colon 2^N \to R,$$

é a função que associa a cada coalizão $S \subset \{1, \ldots, n\}$ o "valor" da coalizão $v(S)$. Uma propriedade que vamos exigir de v é:

$$S, T \subset 2^N, \quad S \cap T = \emptyset \Rightarrow v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

Esta propriedade exprime a idéia de que quanto maior a coalizão maior a performance.

Nesta formulação não nos importamos como chegamos a v que é a função que diz quanto a coalizão S recebe se agir de forma coordenada.

Estes jogos são chamados de jogos com pagamento (ou transferência) lateral porque neles o que importa é a totalidade $v(S)$ do bem em questão (cruzeiros, por exemplo) que a coalizão S recebe.

Uma propriedade particular que v pode ter é expressa pela:

Definição: Um jogo é chamado de não essencial se $\forall\, S, T \subset N$ $S \cap T = \emptyset$ tivermos, $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$, i.e., não existem ganhos de formar coalizão maior.

Uma conseqüência simples deste fato é: se v é não essencial, então,

$$v(N) = \sum_{i=1}^{n} v(i).$$

Definição: Um jogo v é chamado de soma constante se $\forall\, S \subset N$,

$$v(S) + v(N \backslash S) = v(N).$$

Para v, arbitrária temos a

Definição: Uma solução do jogo v é um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ tal que:

(i) $\forall\, i, \quad v(\{i\}) \leq x_i$

(ii) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq v(N)$.

Observação: 1. A condição (i) é uma condição de racionalidade, ela expressa a idéia de que uma solução tem que proporcionar mais que o indivíduo pode conseguir por si próprio.

2. A condição (ii) é uma condição de factibilidade.

Definiçaõ: Se $x \in \mathbb{R}^n$, é solução do jogo v, e,

$$\forall\, S \subset N \qquad v(S) \leq \sum_{i \in S} x_i$$

x é dita pertencer ao núcleo.

Dado que os jogos essenciais são aqueles nos quais existem ganhos efetivos de se fazerem coalizões um resultado desencorajador é o seguinte.

Teorema. Todo jogo essencial de soma zero tem núcleo vazio.

Demonstração: Suponha que exista $x \in \mathbb{R}^n$ no núcleo. É fácil ver que se v é essencial então

$$(*) \qquad v(N) > \sum_{j=1}^{n} v(j).$$

Por outro lado, como x está no núcleo e o jogo é de soma de zero:

$$(**) \qquad \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j \geq v(N - \{i\}) = v(N) - v(\{i\}).$$

Suponha que $x_i = v(\{i\}) \quad \forall\, i$ então, por (**),

$$v(N) \leq \sum_{j=1}^{n} v(j),$$

o que contradiz (*).

Pela racionalidade individual $\forall\, i \quad v(\{i\}) \leq x_i$ logo, a única alternativa é $v(\{i\}) < x_i$, algum i.

Então, por (**),

$$v(N) < \sum_{j=1}^{n} x_j$$

o que contradiz a condição de factibilidade:

$$v(N) \geq \sum_{j=1}^{n} x_j \,.$$

Existem muitos outros conceitos para jogos cooperativos com pagamentos laterais. Para o leitor interessado sugerimos, novamente, o livro de Owen (1968). Aqui, somente, vamos comentar brevemente o valor de Shapley.

Seja ϕ uma função que associa a cada jogo uma solução com as propriedades: de aditividade, $\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2)$; invariante sob permutações: $\phi_{\pi_i}(v^\pi) = \phi_i(v)$ para toda permutação $\pi \colon N \to N$, onde v^π é o jogo permutado i.e., $v^\pi(S) = v(\pi^{-1}S)$, $\forall\, S \subset N$;

$\sum_{i\in S}\phi_i(v) = v(M)$ se M é tal que $\forall T \subset N, \quad v(T) = v(M\cap T)$.
Então, Shapley provou que ϕ tem necessariamente a forma:

$$\phi_i(v) = \sum_{T\subset M} \frac{1}{m\binom{m-1}{t-1}}\,[v(T) - v(T-\{i\})]$$

onde $m = \#M, \quad t = \#T$.

A interpretação de $\dfrac{1}{m\binom{m-1}{t-1}}$ pode ser feita da seguinte maneira: $\dfrac{1}{m}$ é a probabilidade do jogador i ser escolhido entre os m presentes e $\dfrac{1}{\binom{m-1}{t-1}}$ é a probabilidade de se formar uma dada coalizão de $t-1$ membros entre os $m-1$ indivíduos (os que não involvem a presença de i-ésimo jogador). Portanto, $\dfrac{1}{m\binom{m-1}{t-1}}$ é a probabilidade de se formar uma coalizão com t elementos e com a presença do jogador i. Por sua vez, $[v(T) - v(T-\{i\})]$ é o acréscimo à coalizão T que o jogador i traz.

Exercícios

1. Calcule uma solução minimax para os jogos:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Dê exemplo de um jogo com duas soluções minimax.

3. Dê exemplo de um jogo com uma solução minimax com estratégias simples (i_0, j_0) e tal que exista i^1 com a propriedade

de que se o jogador I começar com esta estratégia o jogador II escolhe j^1 que provoca a escolha i^2 do I que por sua vez provoca II escolher j^2 e assim sucessivamente os jogadores vão escolhendo as estratégias i^n, j^n sem que se convirja para (i_0, j_0) ou mesmo para qualquer outra solução.

4. Seja $v(i) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \qquad v(1,2) = v(1,3) = v(2,3) = p$, $v(1,2,3) = 1$. Compute o núcleo nos casos $p = 0, \quad 1/3,\ 2/3,$ 1.

5. Calcule o valor de Shapley para $N = \{1, 2, 3\}, \quad v(\phi) = 0$, $v(i) = 10, \quad i = 1, 2, 3; \quad v(i, j) = 15, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3;$ $v(1, 2, 3) = 20$.

6. Suponha duas firmas que vendem um mesmo produto e se vêem face a função inversa de demanda: $\varphi(s_1 + s_2) = 10 - (s_1 + s_2)$, onde s_i é a quantidade do bem ofertado pela firma $i, \quad i = 1, 2$. Suponha que as firmas não possuem custos de produção. Calcule o equilíbrio de Nash deste mercado, supondo que as firmas maximizem lucros e joguem um jogo em quantidades. Compare a solução com a solução monopolista, i.e., com a solução de $\max\limits_{s \geq 0}(10 - s)s$ e a solução de concorrência perfeita: $s = 10$.

7. Calcule para o exemplo do Exercício 6 o equilíbrio de Nash para um jogo em que as firmas escolhem preços ao invés de quantidades, e a função de demanda é dada por:

$$\varphi(p_1, p_2,) = \begin{cases} \varphi(p_1), & \text{se } p_1 < p_2 \\ \frac{\varphi(p_1)}{2}, & \text{se } p_1 = p_2 \\ 0, & \text{se } p_1 > p_2 \end{cases}$$

8. Prove que o conceito de minimax e o de Nash-Cournot coincidem para jogos de soma zero e dois jogadores.

REFERÊNCIAS

Allais, M. (1953): "Le comportement de l'homme rationnel devant le risque, Critique des postulats de l'École Americaine"
Econometrica vol. 21, 503-546.

Araujo, A. and Mascolell, A. (1978): "Notes on the Smoothing of Aggregate Demand"
Journal of mathematical Economics, vol. 5, 113-127.

Arrow, K. and Hahn., F. (1971): "General Competitive Analsis"
Holden Day, S.F.

Arrow, K. (1953): "Le rôle des Valeurs Boursières pour la Répartition la meilleure des risques"
Econometrie, Paris, Centre National de la Recherche Scientifique, 41-48.
Tradução para o inglês em Review of Economic Studies, vol. 31, 91-96.

Arrow, K. (1963): "Social Choices and Individual Values"
Yale University Press.

Arrow, K. and Debreu, G. (1953): "Existence of Equilibrium for a Competitive Economy"
Econometrica voll. 22, 265-290.

Aumann, Jr. (1964): "Markets with a Continum of Traders"
Econometrica, vol. 32, 39-50.

Bowen, R. (1968): "A new proof of a theorem in Utility Theory"
I.E.R. 9, Oct. 1968.

Cournot, A. (1897): “Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth”
Macmillan: New York.

Debreu, G. (1959): “Theory of Value”
Yale University Press, N.Y., London.

Debreu, G. (1964): “Continuity properties of Paretian Utility”
I.E.R., 5 sept. 1964.

Debreu, G. (1970): “ Economies with a Finite Set of Equilibria”
Econometrica 38, n.3, 387-393.

Debreu, G. (1974): “ Excess Demand Functions”
Journal of mathematical Economics, 1.

Debreu, G. and Scarf, H. (1963): “A Limit Theorem on the Core of an Economy”
International Economic REview, 4, 235-246.

Ekeland, I. (1979): “Economie Mathématique”
Hermann, Paris.

Gale, D. and Mascolell, A. (1975): “An Equilibrium Existence Theorem for a General Model without Ordered Preferences”
Journal of Mathematical Economis 2, 9-15.

Herstein, S.N. and Milnor, J. (1953): “An Axiomatic Approach to Measurable Utility”
Econometrica, vol. 21.

Hildebrand, W. (1974): “Core and Equilibria for Large Economies”
Princeton University Press, Princeton, N.J.

James, Barry. R. (1981): "Probabilidade: um curso em nível intermediário"
Projeto Euclides, IMPA, CNPq.

Lima, Elon L. (1976): "Curso de Análise", vol. 1
Projeto Euclides, IMPA, CNPq.

Lima, Elon L. (1981): "Curso de Análise", vol. 2
Projeto Euclides, IMPA, CNPq.

Machina, M. (1982): "Expect Utility Analysis without the Independence Axiom"
Econometrica vol. 80, 2, 277-324.

Mascolell, A. (1974): "An Equilibrium Existence Theorem without Complete or Transitive Preferences"
Journal of Mathematical Economics, 1, n. 3.

Mckenzie, L. (1954): "On Equilibrium in grham's Model of World Trade and other Competitive Systems"
Econometrica, vol. 22, 101-147.

Nash, J. (1959): "Non-Cooperative Games"
Ann. of Math. vol. 54, n. 2.

Owen, G. (1968): "Game Theory"
Saunders Co. Philadelphia - London- Toronto.

Pratt, J. (1964): "Risk aversion in the Small and in the Large"
Econometrica, vol. 32 n. 1-1.

Rothschild, M. and Stiglitz, J. (1970): "Increasing Risk I: A Definition"
Journal of Economic Theory 2, 225-243.

Rothschild, M. and Stiglitz, J. (1971): "Increasing Risk II: its Economic Consequences"
Journal of Economic Theory 3, 66-84.

Sonderman, D. (1975): "Smoothing Demand by Aggretion"
Journal of mathematical Economics 2, 201-223.

Simonsen, M.H. (1968): "Teoria Microeconômica"
Fundação Getúlio Vargas, Rio, 4 v.

Simonsen, M.H. (1982): "Notas de Microeconomia"
Fundação getúlio Vargas, Rio de Janeiro.

Schmeidler, D. (1979): "A Bibliographical note on a Theorem of Hardy, Littlewood and Polya"
Journal of Economic Theory 20, 125-128.

Sonnenschein, H. (1973): "Do Walra's Identity and Continuity Characterize the class of Community Excess Demand Functions"?
Journal of Economic Theory, 6.

Starr, R. (1969): "Quasi-Equilibria in Markets with non Convex Preferences"
Econometrica 37, 28-38.

Varian, H. (1978): "Microeconomic Analysis"
W.W. Norton and Co., N.Y.

Von Neumann, J. and Morgensten, O. (1944): "Theory of Games and Economic Gehaviour"
Princeton University Press, Princeton, N.J.